МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ ДЕТЕЙ И ВЗРОСЛЫХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МАТЕМАТИКА

Троицк
2018

Данное учебное пособие предназначено для подготовки к вступительным испытаниям по математике, проводимым вузом самостоятельно. Каждый раздел включает в себя теоретический материал, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы.

СОСТАВИТЕЛИ:

Акулич О.Е. – к.п.н., доцент
Скрипка С.А. – старший преподаватель
кафедра «Математические и естественнонаучные дисциплины»

Общие положения

Программа предназначена для дополнительной подготовки детей и взрослых по Математике.

Основная цель программы состоит в оказании помощи абитуриенту по усвоению основного алгоритма построения решения математических задач и так же надлежащего текстуального представления этого решения при письменной форме сдачи экзамена по математике, проводимого вузом самостоятельно.

Каждый раздел учебного пособия включает в себя теоретический материал, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы.

Глава 1

Тождественные преобразования алгебраических выражений

1.1. Теоретические сведения

При решении тех или иных математических задач требуется выполнять преобразования алгебраических выражений. Преобразования, которые не изменяют значений выражений, называются *тождественными*.

Два выражения *тождественно равны*, если соответствующие значения переменных совпадают при всех допустимых значениях переменных. Например, выражения $3x\left(2x^2-4y\right)$ и $6x^3-12xy$ тождественно равны, так как каждой паре переменных x и y соответствуют одинаковые значения этих выражений.

Примерами тождеств могут служить равенства:

1. $x+y=y+x$ – переместительный закон сложения;
2. $\left(x+y\right)+z=x+\left(y+z\right)$ – сочетательный закон сложения;
3. $xy=yx$ – переместительный закон умножения;
4. $\left(xy\right)z=x\left(yz\right)$ – сочетательный закон умножения;
5. $\left(x+y\right)z=xz+yz$ – распределительный закон умножения.

Одночленом называют выражение, представляющее собой произведение чисел и степеней переменных с натуральным показателем.

Например, каждое из выражений $5m^2$, $-3b^2x^3$, $\frac{1}{2}x$, $5x^2y^7$, $2x\left(-5x^2\right)$ является одночленом. Числа и натуральные степени переменных также называют одночленами. Сумму одночленов называют *многочленом*.

Чтобы умножить многочлен на многочлен достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена, а полученные произведения сложить. Например,

$$\left(2a^2+b^2\right)\left(3a^2-2ab+4b^2\right)=2a^2\left(3a^2-2ab+4b^2\right)+b^2\left(3a^2-2ab+4b^2\right)=$$

$$6a^4-4a^3b+8a^2b^2+3b^2a^2-2ab^3+4b^4=6a^4-4a^3b+11a^2b^2-2ab^3+4b^4$$

Для того чтобы умножать многочлен на многочлен, можно использовать следующие формулы:

1. *Формулы сокращенного умножения.*

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

2. *Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.*

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),\ \text{ãäå}\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

3. *Свойства степеней.*

Для любых x и y и a,b > 0 имеют место равенства:

$$a^0=1$$

$$a^xa^y=a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$$

$$\left(ab\right)^x=a^xb^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$

4. *Свойства арифметических корней.*

Для любых натуральных n,k >1 и любых a,b > 0 имеют место равенства:

$\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \ \forall a$

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

1.2 Действия над степенями с натуральными показателями

Вычислить:

1.2.1. $4^2 \cdot 5^4$

1.2.2. $9^3 \div 3^4$

1.2.3. $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$

1.2.4. $\left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$

1.2.5. $\frac{5^7}{5^8}$

1.2.6. $\frac{6^3 \cdot 5^2}{15^3 \cdot 2^4}$

1.2.7. $\frac{10^3 \cdot 9^2}{6^3 \cdot 5^2}$

1.2.8. $\left(3\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 0.1^3$

1.2.9. $2{,}5^3 \div 5^3$

1.2.10. $1{,}5^4 \div 3^3$

1.2.11. $\left(2^3\right)^2 \cdot 5^6$

1.2.12. $\left(5^2\right)^3 \cdot 2^6$

1.2.13. $3 \cdot 2^6 - 8 \cdot 4^3 + 5 \cdot 8^2$

1.2.14. $\frac{25^3 \cdot 14^2}{49 \cdot 10^6}$

Упростить выражения:

1.2.15. $3(a-b)+3(b-c)+3(c-a)$

1.2.16. $0{,}1(5p-3q+10r)-10(0{,}3p-0{,}5q-r)$

1.2.17. $-\left(3x+7y^2\right)-\left(x^2+y\right)+\left(2x-4y\right)-\left(5x^2-4y^2\right)$

1.2.18. $14x^3yz^2 \cdot 7xy^2z^3$

1.2.19. $u^2v \cdot v^2t \cdot t^2u$

1.2.20. $\frac{2}{3}bz \cdot \frac{3}{4}ax \cdot \frac{1}{2}xy \cdot 2y^2$

1.2.21. $\left(-3a^2b\right)^3$

1.2.22. $\left(6xy^3\right)^2$

1.2.23. $\left(\frac{3}{5}x^4y^3\right)^3$

1.2.24. $\left(3x^2y\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}xy\right)^3$

1.2.25. $\left(0,2xy^3\right)^3\cdot\left(5x^2y^2\right)^2$

1.2.26. $\left(3b^2\right)^4\cdot\left(\frac{b}{9}\right)^3\cdot 2b$

1.2.27. $\left(10c^2d\right)^4\cdot\left(0,1d^2\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}c\right)^3$

1.2.28. $\left(-2u^2+3u+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}u\right)$

1.2.29. $10uv\cdot\left(0,1u^2-0,2uv+v\right)$

1.2.30. $\frac{1}{3}x^2\cdot\left(mx^3-nx+p\right)$

1.2.31. $\left(2c+3d\right)\left(c-d\right)$

1.2.32. $\left(4a+2b\right)\left(0,3a-0,15b\right)$

1.2.33. $\left(2x-3y-4z\right)\left(x+2\right)$

1.2.34. $\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)$

1.2.35. $\left(u+v\right)\left(u-v\right)$

1.2.36. $\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x-y\right)$

1.2.37. $\left(u^2-vt\right)\left(v^2-ut\right)\left(t^2-uv\right)$

1.2.38. $a\left(a+1\right)^2+\left(3a-1\right)\left(4a+1\right)-\left(2a-1\right)\left(2a+1\right)$

1.2.39. $\left(u-v\right)\left(u+v\right)\left(u^2+v^2\right)$

1.2.40. $\left(5a-\frac{1}{5}b\right)^2$

1.2.41. $\left(t^2+3t\right)^2$

1.2.42. $(2a-3b)^3$

1.2.43. $(5+A)^3$

1.2.44. $(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right)$

1.2.45. $(\mathrm{B}+7)\left(49-7\mathrm{B}+\mathrm{B}^2\right)$

1.2.46. $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2)$

1.2.47. $\dfrac{28a^2}{27x^3}\cdot\left(-\dfrac{63x^4}{140a}\right)$

1.2.48. $\dfrac{8b^5c^6}{33x^4}\cdot\dfrac{55c^2x^5}{12b^4}$

1.2.49. $-\dfrac{6m^3n^3}{35p^4}\cdot\dfrac{49n^4}{m^6p^3}\cdot\dfrac{5m^4p^7}{-42n^6}$

1.2.50. $\dfrac{192m^6n^9}{-77k^5p}:\dfrac{36m^5n^8}{55k^4p^3}$

1.2.51. $\dfrac{12ac^2}{-b^6}:\dfrac{-18a^2c}{b^4}$

1.2.52. $\dfrac{8z}{13x^2y}\cdot\left(-2a^4x^4y^3\right)$

1.2.53. $-16a^2b^3\cdot\dfrac{2z}{8a^2b}$

1.2.54. $11ab^3c:\dfrac{121a^3b^2c}{x^3y^2}$

1.2.55. $2u^4v:\dfrac{2u^4v}{a^2b}$

1.2.56. $\dfrac{u-v}{3u}\cdot\dfrac{u^3v}{u^2-uv}$

1.2.57. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{9b^3}\cdot\dfrac{3b}{x^2-y^2}$

1.2.58. $\dfrac{\dfrac{5}{y}-3y^2}{3y-\dfrac{5}{y^2}}$

1.2.59. $\dfrac{8x-\dfrac{27}{x^2}}{\dfrac{9}{x}+4x+6}$

1.2.60. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

Сократить дроби:

1.2.61. $\dfrac{45a^2}{120ab}$

1.2.62. $\dfrac{-28t^4}{-2t^3z}$

1.2.63. $\dfrac{64x^3t}{224x^5t^2}$

1.2.64. $\dfrac{7b^2(a-c)}{14b(a-c)^2}$

1.2.65. $\dfrac{7(x+y)^2(x-y)^3}{-14(x+y)^2(x-y)}$

1.2.66. $\dfrac{(-u)^3}{u^2}$

1.2.67. $\dfrac{-15x^3z(c-8)}{25x^2z^3(8-c)}$

1.2.68. $\dfrac{10\alpha^2\beta^5(4u-3v)}{-18\alpha^3\beta^4(3v-4u)}$

1.2.69. $\dfrac{a^2}{a^2+ab}$

1.2.70. $\dfrac{ay-by}{a-b}$

1.2.71. $\dfrac{(m-n)^2}{n^2-m^2}$

1.2.72. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$

Привести к общему знаменателю:

1.2.73. $\dfrac{x+8}{6x^2}+\dfrac{2}{3x}$

1.2.74. $\dfrac{x^3-1}{9x^3}-\dfrac{x^2-4}{12x^2}-2$

1.2.75. $4y-3\dfrac{y+1}{5y}+\dfrac{2-y}{10}$

1.2.76. $\dfrac{6-y}{y+4}+\dfrac{2y+1}{y-4}+7$

1.2.77. $\dfrac{4}{y-1}-\dfrac{2}{1-y}+3$

1.2.78. $\dfrac{c}{c+8}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{c}{8}$

1.2.79. $\dfrac{4x-1}{x(x-1)}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x}$

1.2.80. $\dfrac{-2}{(x+5)(x-6)}+\dfrac{1}{(x+5)(x-1)}-\dfrac{4}{(x-6)(x-1)}$

1.2.81. $\dfrac{5x-7}{x^2-4}-\dfrac{3x-2}{2-x}$

1.2.82. $\dfrac{2-3y}{y^2-9}-\dfrac{5-2y}{3-y}$

1.3. Действия над степенями с целыми отрицательными показателями

Вычислить:

1.3.1. $0,25^{-3}$

1.3.2. $(-0,125)^{-2}$

1.3.3. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$

1.3.4. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-1}$

1.3.5. $\left(-\dfrac{5}{8}\right)^{-2}$

1.3.6. $\left(1\dfrac{1}{13}\right)^{-2}$

1.3.7. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}-\left(\dfrac{7}{4}\right)^{2}$

1.3.8. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}-3^{-3}$

Выполнить действия:

1.3.9. $x^2:x^3$

1.3.10. $a:a^7$

1.3.11. $\left(t^{-3}\right)^2$

1.3.12. z^3z^{-6}

1.3.13. $\left(u^2v^{-2}\right)^2$

1.3.14. $\left(\dfrac{a^{-3}}{c^2}\right)^{-4}$

1.3.15. $\left(\dfrac{c^2}{d^{-3}}\right)^{3}$

1.3.16. $d^2:d^{-1}$

1.3.17. $a^{-1}:a^{-3}$

1.3.18. $\beta^{-5}\beta^{-2}$

1.3.19. $\dfrac{x^{-4}}{x^{-2}}$

1.3.20. $\dfrac{y^{-7}}{y^{-1}}$

1.3.21. $\dfrac{F^2t^4t^{-7}}{F^3t^5t^{-10}}$

1.3.22. $\dfrac{1,4m^4np^3}{0,01m^2np}$

1.3.23. $\dfrac{2\frac{1}{2}u^2t}{4,5u^2}$

1.3.24. $0,02a^2b^4c^6\div 10ab^2c^3$

1.4. Действия с квадратными корнями

Вычислить:

1.4.1. $\sqrt{\frac{4}{9}}$

1.4.2. $\sqrt{\frac{169}{144}}$

1.4.3. $-\sqrt{0,36}$

1.4.4. $-\sqrt{\frac{44}{99}}$

1.4.5. $\sqrt{1,2^2}$

1.4.6. $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$

1.4.7. $\sqrt{(-7)^2}$

1.4.8. $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

1.4.9. $\sqrt{2^{10}}$

1.4.10. $\sqrt{3^8}$

1.4.11. $\left(\sqrt{15,5}\right)^2$

1.4.12. $\left(-\sqrt{2}\right)^2$

1.4.13. $\left(-\sqrt{0}\right)^2$

1.4.14. $\sqrt{15\cdot 27\cdot 20}$

1.4.15. $\sqrt{9025}$

1.4.16. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$

1.4.17. $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{245}}$

1.4.18. $\sqrt{1\frac{120}{169}}$

1.4.19. $\frac{\sqrt{36,1}}{40}$

1.4.20. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

1.4.21. $\left(\sqrt{0,2}-\sqrt{0,8}+\sqrt{1,8}+\sqrt{3,2}\right)\cdot\sqrt{5}$

1.4.22. $\frac{5\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$

1.4.23. $\frac{3\sqrt{10}-\frac{12}{\sqrt{10}}}{2\sqrt{10}-\frac{19}{\sqrt{10}}}$

1.4.24. $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$

1.4.25. $\sqrt{\frac{8}{9}}-\sqrt{\frac{25}{18}}+\sqrt{\frac{49}{72}}$

1.4.26. $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

1.4.27. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$

1.4.28. $\dfrac{15}{\sqrt{3}\sqrt{15}}$

1.4.29. $\dfrac{28}{\sqrt{2}\sqrt{7}}$

1.5. Действия над корнями с натуральными отрицательными показателями

Вычислить:

1.5.1. $\sqrt{100\cdot 64}$

1.5.2. $\sqrt[3]{8\cdot 125}$

1.5.3. $\sqrt[4]{625\cdot 1296}$

1.5.4. $\sqrt{\dfrac{25}{49}}$

1.5.5. $\sqrt{\dfrac{64}{100}}$

1.5.6. $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}$

1.5.7. $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}$

1.5.8. $\sqrt[7]{13^7}$

1.5.9. $\sqrt{5^4}$

1.5.10. $\sqrt[3]{3^6}$

1.5.11. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^8}$

1.5.12. $\sqrt[7]{2^{21}}$

1.5.13. $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{9}$

1.5.14. $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[3]{4}$

1.5.15. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

1.5.16. $\dfrac{\sqrt[4]{240}}{\sqrt[4]{1215}}$

1.5.17. $\left(\sqrt[4]{4}\right)^4$

1.5.18. $\left(\sqrt[4]{8}\right)^8$

1.5.19. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$

Преобразовать выражение:

1.5.20. $\left(\sqrt[3]{m^2}\right)^4$

1.5.21. $\left(\sqrt[4]{x}\right)^5$

1.5.22. $\left(\sqrt[9]{a^2b^5}\right)^2$

1.5.23. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3}}$

1.5.24. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}y^5}}$

1.5.25. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{m^9n^{12}}}$

1.5.26. $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$

1.6. Действия над степенями с дробными показателями

Вычислить:

1.6.1. $4^{\frac{1}{2}}$

1.6.2. $8^{\frac{2}{3}}$

1.6.3. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

1.6.4. $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

1.6.5. $25^{\frac{3}{2}}\cdot 0{,}001^{\frac{1}{3}}$

1.6.6. $81^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

Записать в виде степеней с дробным показателем:

1.6.7. $\sqrt[3]{x^2}$

1.6.8. $\sqrt[4]{a^3}$

1.6.9. $\sqrt[6]{x}$

1.6.10. $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

1.6.11. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

Записать в виде корня:

1.6.12. $a^{\frac{2}{3}}$

1.6.13. $a^{-\frac{1}{4}}$

1.6.14. $a^{-\frac{3}{2}}$

1.6.15. $x^{-\frac{1}{2}}$

1.6.16. $x^{\frac{4}{3}}$

Выполнить действия:

1.6.17. $a\cdot a^{\frac{1}{2}}$

1.6.18. $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}$

1.6.19. $y^{-\frac{1}{6}}:y^{\frac{1}{3}}$

1.6.20. $m^{\frac{1}{3}}:m^{-\frac{1}{6}}$

1.6.21. $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

1.6.22. $\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)$

1.6.23. $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)$

1.6.24. $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

1.6.25. $\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\cdot c^{\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot c^{-\frac{1}{5}}\right)$

1.6.26. $\left(a^{1\frac{1}{2}}\cdot b^{2\frac{1}{3}}\cdot c^{1\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}\cdot c^{-\frac{3}{4}}\right)$

Упростить выражение:

1.6.27. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

1.6.28. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

1.6.29. $\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

1.6.30. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-25}{x^{\frac{1}{6}}+5}$

1.6.31. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-16}{x^{\frac{1}{4}}-4}$

1.6.32. $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}$

1.6.33. $\dfrac{x-64}{x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}+16}$

1.7. Более сложные задачи

Пример 1.

Вычислить выражение:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right)}{\left(a-2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}\right)} \quad \text{при} \quad a=\frac{1}{3}, b=-1.$$

Решение удобнее производить по действиям:

1) $\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$

2) $\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{2a(a+b)}=\dfrac{a^2+2ab+b^2-2ab}{2a(a+b)}=\dfrac{a^2+b^2}{2a(a+b)}$

3) $a-2b+\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{(a-b)^2}{a}$

4) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=$

$=\frac{a^2-ab+ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Мы проделали действия, указанные в скобках. Теперь перемножим выражения в числителе, знаменателе и произведем деление:

5) $\frac{\frac{(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{a^2+b^2}{2a(a+b)}}{\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}=\frac{(a-b)^2\left(a^2+b^2\right)a\left(a^2-b^2\right)}{ab2a(a+b)(a-b)^2\left(a^2+b^2\right)}=\frac{a-b}{2ab}$

Найдем числовой результат при $a=\frac{1}{2},\ b=-1$

$\frac{\frac{1}{3}-(-1)}{2\frac{1}{3}(-1)}=\frac{4}{3}:\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4\cdot 3}{3\cdot 2}=-2$

Пример 2.

Упростить выражение: $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

1) $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$

2) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{2}=\frac{ab}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$

3) $a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

4) $\left(\frac{\sqrt{ba}\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{2}=\frac{ab}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}$

5) $\dfrac{ab}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}+\dfrac{ab}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}=\dfrac{ab\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=$

$=\dfrac{ab(2a+2b)}{(a-b)^2}=\dfrac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$

Пример 3.

Упростить выражение: $\dfrac{1}{2x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{1-y}\right):\dfrac{5}{4x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}+1\right)$

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{1-y}=\dfrac{1+\sqrt{1+y}\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{1+\sqrt{(1+y)(1-y)}}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+y}}$

2) $\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{2x\sqrt{1+y}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}+1=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$

4) $\dfrac{5}{4x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{5\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}{4x\sqrt{1-y^2}}$

5) $\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{2x\sqrt{1+y}}:\dfrac{5\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}{4x^2\sqrt{1-y^2}}=$

$=\dfrac{\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)\left(4x^2\sqrt{1-y^2}\right)}{2x\sqrt{1+y\cdot 5\cdot\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}}=\dfrac{2x\sqrt{1+y}\sqrt{1-y}}{5\sqrt{1+y}}=\dfrac{2x\sqrt{1-y}}{5}$

Выполнить действия:

1.7.1. $12{,}07x+4\dfrac{7}{8}-(3{,}6x-0{,}8y)+(-5{,}04x-7{,}5y)-\left(6\dfrac{1}{12}-0{,}03x\right)$

1.7.2. $0{,}4p^2x+\dfrac{3}{4}px^2-\left(\dfrac{1}{4}px^2-\left(-\dfrac{2}{5}p^2x-\left(\dfrac{7}{2}px^2-p\right)\right)\right)$

1.7.3. $\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)(a+b)$

1.7.4. $\left(-4a^5b^2-\dfrac{4}{9}a^4b^5+\dfrac{2}{3}a^3b^6\right):\left(\dfrac{2}{3}a^3b^2\right)$

1.7.5. $4\left(4t^2-4t+1\right)\left(\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}\right)+\left(2t^6-t^5\right):\left(-\dfrac{1}{4}t^3\right)$

1.7.6. $\left(3a^2+0,2\right)^2-1,2a^2$

1.7.7. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2$

1.7.8. $\dfrac{(2x+3)^2+2\left(4x^2-9\right)+(2x-3)^2}{(2x+3)^2-2\left(4x^2-9\right)+(2x-3)^2}$

1.7.9. $n^6+11-2\left(1-n^3\right)^2-\left(3-n^3\right)\left(n^3+3\right)$

1.7.10. $\dfrac{(2a+3)^3-(2a-3)^3}{(3a+4)^2+3a^2-24a-7}$

Разложить многочлены на множители:

1.7.11. $5a^3+20a^2b+20ab^2$

1.7.12. $a^2(x-1)-b^2(x-1)$

1.7.13. $a^5-a^3-a^2+1$

1.7.14. x^4-4

1.7.15. a^6-b^6

1.7.16. $(n-x)\left(5n^2-4x^2\right)-\left(3x^2-4n^2\right)(x-n)$

1.7.17. $2x^2+10x+12$

1.7.18. $10x-21-x^2$

1.7.19. u^4+5u^2-36

1.7.20. $\left(t^2+t\right)^2-8\left(t^2+t\right)+12$

Сократить дробь:

1.7.21. $\dfrac{b^4-a^4}{a^2-b^2}$

1.7.22. $\dfrac{a^3x+a^2x^3}{a^4x^2+a^3x^4}$

1.7.23. $\dfrac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1}$

1.7.24. $\dfrac{2+x-3x^2}{9x^2-4}$

1.7.25. $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$

Упростить выражение:

1.7.26. $\dfrac{3a^2+12a+13}{3a+6}-a-\dfrac{1}{3(a+2)}$

1.7.27. $\left(\dfrac{a}{a-1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$

1.7.28. $\dfrac{9a^2-4}{2-3a}-\dfrac{6a^2-5a-6}{3-2a}$

1.7.29. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}-\dfrac{n+1}{n-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4n}\right)$

1.7.30. $\left(\dfrac{x^4}{x+1}-\dfrac{1}{x^4+x^5}\right):\left(x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

Докажите тождества:

1.7.31. $\left(\dfrac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{m^2+2mn+n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

1.7.32. $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)=\dfrac{1}{x+2}$

1.7.33. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}-2+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\dfrac{\dfrac{x}{y}-1+\dfrac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}=x^3+y^3$

Вычислить:

1.7.34. $\dfrac{3^{-12}\cdot 9^5}{27^{-4}\cdot 3^{12}\cdot 9^{-2}}$

1.7.35. $\dfrac{(0,4)^{-2}\cdot(2,5)^{-4}}{(0,16)^{-5}\cdot\left((6,25)^{-3}\right)^2}$

1.7.36. $\left(1-\left(1-2^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}+\left(1+\left(1-2^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

Упростить выражение:

1.7.37. $\dfrac{\left(ab^{-5}-a^{-5}b\right)^{-1}\left(a^{-3}+b^{-3}\right)}{\left(a^{-1}b^{-4}-b^{-1}a^{-4}\right)^{-1}}$

1.7.38. $\left(1\dfrac{13}{25}a^{8}b^{-10}-\dfrac{4a^{8}}{5b^{10}}\right):\dfrac{0,2a^{-7}b^{-1}}{a^{-3}b^{2}}$

1.7.39. $\left(\dfrac{(p-g)^{3}}{(2m)^{-2}(p+g)^{2}}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{(p-g)}{4^{-1}(p+g)^{3}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{m}{2}\right)^{-4}$

1.7.40. $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}}\right)^{-1}\cdot\left(\left(\dfrac{b}{3a}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a}{3b}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot\dfrac{3\left(a^{-1}+b^{-1}\right)}{(ab)^{-1}}$

Упростить выражения и вычислить при указанных значениях переменной:

1.7.41. $\left(3b^{-2}-2a^{-1}\right)\cdot\left(\dfrac{b^{-2}}{3^{-1}}+\dfrac{1}{2^{-1}a}\right)\left(4a^{-2}+\dfrac{b^{-4}}{3^{-2}}\right)$ при $a=-2,b=\sqrt{3}$

1.7.42. $\left(\left(\dfrac{a^{-12}}{2^{-2}}-\dfrac{81}{b^{4}}\right)\div\left(\dfrac{2}{a^{6}}+9b^{-2}\right)\right):\left(\sqrt{2}a^{-3}-\dfrac{3}{b}\right)$ при $a=\sqrt{2},b=6$

1.7.43. $\left(a+\left(1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$ при $a=-\dfrac{1}{3}$

1.7.44. $\dfrac{\dfrac{1}{2}-x^{-1}}{4-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2}}\div\left(\dfrac{(2+x)^{-1}}{2^{-2}}-2x^{-1}-1\right)$ при $x=-\dfrac{1}{2}$

Докажите тождества:

1.7.45. $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\left(\dfrac{4ab}{b^{2}-a^{2}}\right)^{-1}=-1$

1.7.46. $\left((ax-b)(a+b)^{-1}-\dfrac{bx+a}{b-a}\right)\cdot\left(\left(\dfrac{x^{2}-1}{a^{2}-b^{2}}\right)^{-1}\right):\dfrac{a^{2}+b^{2}}{(x-1)^{-1}-1}=1$

Выполнить действия:

1.7.47. $\left(2\sqrt{\dfrac{5}{2}}-\sqrt{10}+\sqrt{\dfrac{125}{2}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

1.7.48. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3+a\sqrt{2}}$

1.7.49. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a-1}}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4a}}\right)$

1.7.50. $a^{\frac{1}{2}}-\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$

1.7.51. $25^{-\frac{5}{4}}\cdot125^{\frac{2}{3}}\cdot5^{-\frac{1}{2}}$

1.7.52. $\left(\dfrac{64a^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{17}{5}}}{a^{-\frac{7}{30}}}\right)^{-\frac{1}{6}}$ при $a=2{,}5$

1.7.53. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+ba^{\frac{1}{3}}}{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$

Упростить выражение:

1.7.54. $\left(\dfrac{p^{\frac{3}{2}}+g^{\frac{3}{2}}}{p-g}-\dfrac{p-g}{p^{\frac{1}{2}}+g^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\sqrt{pg}\,\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{g}}{p-g}\right)^{-1}$

1.7.55. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$

1.7.56. $\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

1.7.57. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{y}}-\left(\sqrt{xy}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

1.7.58. $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2\right)$

1.7.59. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ax}}$

1.7.60. $\left(\dfrac{0{,}5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{(2-a)^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{4}}}{2}\right)\div\left(2a-a^2\right)^{\frac{1}{4}}$

1.7.61. $\left(\left(-\sqrt[3]{x^{0,4}}\right)^5+\left(-2^{\frac{3}{5}}\sqrt{x^{0,1}}\right)^4-x^{-1}\left(-\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^{-0,5}}}\right)^2\right)\cdot\dfrac{2^{-1}}{\sqrt[3]{x^2}}$

1.7.62. $\left(\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(ab^{-1}+1\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}\right)^{-2}-\dfrac{2b}{a-b}$

1.7.63. $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4$

1.8. Задания для самостоятельной работы абитуриента

Упростить выражения:

1.8.1. $\left(\dfrac{1}{2-6x}+\dfrac{1}{27x^3-1}:\dfrac{1+3x}{1+3x+9x^2}\right)\cdot\dfrac{2+6x}{x}$

1.8.2. $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$

1.8.3. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^2b^2}}{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{(a-b)^{-1}}{b^{-\frac{1}{2}}}$

1.8.4. $\left(\frac{2x+1}{x+2}-\frac{4x+2}{4-x^2}\right):\frac{2x+1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$

1.8.5. $\frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\frac{1}{a^2-\sqrt{a}}-a$

1.8.6. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1}$

1.9. Задания для подготовки к ЕГЭ

1.9.1. *Чему равно частное* $\frac{3{,}6\cdot 10^{-8}}{2\cdot 10^{-4}}$?

1) 0,00018; 2) 0,0018; 3) 0,018; 4) 180.

1.9.2. *Вычислить:* $9^{1{,}5}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}+\left(\frac{5}{6}\right)^{4{,}5}\cdot(1{,}2)^{4{,}5}$.

1) $7\frac{1}{3}$; 2) 8,5; 3) 10; 4) 12.

1.9.3. *Вычислить:* $\frac{\sqrt[4]{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$

1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$.

1.9.4. *Упростить:* $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right):\frac{x^2+y^2}{xy}$

1) $\frac{x-y}{x+y}$; 2) $\frac{2x+y}{x-y}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{x}{x-y}$.

1.9.5. *Упростить:* $\frac{a^2}{3+a}\cdot\frac{9-a^2}{a^2-3a}+\frac{27+a^3}{3-a}:\left(3+\left(\frac{a^2}{3-a}\right)\right)$

1) 9; 2) 3; 3) a; 4) $a+3$.

1.9.6. *Найти значения выражения:* $\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+y^{\frac{1}{3}}$, если x=27, y=25

1) $3\text{-}5^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) 9; 4) $3+5^{\frac{2}{3}}$.

1.9.7. *Найти значения выражения:* $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$

1) $\frac{\sqrt[4]{a}+1}{a^2}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 3) $\frac{\sqrt{a}+1}{a}$; 4) $\frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$

1.9.8. *Упростить выражение:* $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$; 3) $\frac{1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[3]{xy}}$.

1.9.9. Если $\sqrt{37-t}-\sqrt{15-t}=2$, то $\sqrt{37-t}+\sqrt{15-t}$ равно

1) $\frac{20}{3}$; 2) 11; 3) 8; 4) $\frac{13}{2}$.

Глава 2

Алгебраические уравнения

2.1. Разложение на множители

Для разложения многочлена на множители можно использовать *следствие из теоремы Безу*:

Если α является корнем уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0,\ a_n \neq 0 \left(*\right),$$

то многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ делится на выражение $x - \alpha$ без остатка.

При решении алгебраических уравнений с целыми коэффициентами используется следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы несократимая дробь $\dfrac{p}{g}$ $\left(g \neq 0\right)$ была корнем уравнения (*) с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы число p было делителем свободного члена a_0, а число g – делителем старшего коэффициента a_n.

Следовательно, если уравнение $\left(*\right)$ имеет целые коэффициенты, а $a_n = 1$, то рациональными корнями уравнения могут быть только целые числа, являющиеся делителями свободного члена a_0.

Разложить на множители:

2.1.1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2.1.2. $x^3 - 5x^2 - x + 5$
2.1.3. $x^3 - x^2 - 4x + 4$
2.1.4. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
2.1.5. $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
2.1.6. $x^3 + 2x^2 - x - 2$
2.1.7. $x^3 - 5x^2 + 8x - 16$
2.1.8. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
2.1.9. $x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$
2.1.10. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$

2.2. Линейные и квадратные уравнения

Решить линейные уравнения:

2.2.1. $30x=-5$
2.2.2. $8-0{,}8x=0$
2.2.3. $13-\left(5x+11\right)=6x$
2.2.4. $x\left(2x+3\right)-5\left(x^2-3x\right)=3x\left(7-x\right)$
2.2.5. $\frac{x}{5}+\frac{x+2}{15}=\frac{1}{3}$
2.2.6. $\left(x-2\right)^3+\left(x+2\right)^3=2\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)$

Решить квадратные уравнения:

2.2.7. $x^2+3x=0$
2.2.8. $x^2-5x=0$
2.2.9. $3x^2-27=0$
2.2.10. $7x^2+19=0$
2.2.11. $x^2-5x+6=0$
2.2.12. $x^2-13x+22=0$
2.2.13. $3x^2+x-30=0$
2.2.14. $x^2-x-1=0$
2.2.15. $16x^2-40x+25=0$

2.3. Рациональные уравнения

Рациональным уравнением называется уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)\neq 0$ – многочлены. Решение рационального уравнения сводится к решению уравнения $P(x)=0$ и проверке того, что полученные корни удовлетворяют условию $Q(x)\neq 0$, то есть уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ равносильно системе: $\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$.

Пример. *Решить уравнение* $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}=0$.

Решение. Дробь равно нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$.

Решая первое уравнение, получаем, что x_1=1, x_2=2. Решая второе уравнение, получаем, что $x_3\neq 3$. Значит, решениями уравнения являются x_1=1, x_2=2.

Ответ: x_1=1, x_2=2.

Решить уравнения:

2.3.1. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0$

2.3.2. $\dfrac{17x+26}{4x+3}-3=0$

2.3.3. $\dfrac{71-3x}{6x-9}=\dfrac{1}{3}$

2.3.4. $x-\dfrac{20}{x}=1$

2.3.5. $1-\dfrac{15}{x}=\dfrac{16}{x^2}$

2.3.6. $x^8-15x^4-16=0$

2.3.7. $x^3-5x^2+6x=0$

2.3.8. $x^3-3x^2-x+3=0$

2.3.9. $\dfrac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$

2.3.10. $\dfrac{x^4-256}{16-x^2}=2\left(7x+12\right)$

2.3.11. $\dfrac{27x^3+125}{3x+5}=-\left(5+48x\right)$

2.3.12. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}=1$

2.3.13. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x-1}$

2.3.14. $\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{2x+2}=\frac{9}{8-2x}$

2.3.15. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$

2.3.16. $\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23$

2.3.17. $x=\frac{\left(3-x\right)^2}{2}-\frac{x\left(x-12\right)}{18}-\frac{\left(3-x\right)\left(x-12\right)}{36}$

2.3.18. $2\left(1-x\right)=\frac{\left(x-1\right)^2}{2}-\frac{\left(x-1\right)^2}{3}+\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{6}$

2.3.19. $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$

2.3.20. $\frac{x}{x-5}-\frac{32}{x-2}=\frac{15}{x^2-7x+10}$

2.3.21. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$

2.3.22. $\frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5}=\frac{(4x-5)^2}{16x^2-25}$

2.3.23. $\frac{5}{x-1}-\frac{2\left(x^2+4\right)}{x^2-1}=\frac{3\left(1-x\right)}{2x+2}$

2.3.24. $\frac{13}{x^2+x+1}+\frac{18x+7}{x^3-1}=\frac{30}{x^2-1}$

2.3.25. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

2.3.26. $\frac{1}{3-x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{2x-6}+\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2-2x-3}$

2.3.27. $\frac{x+9}{x^2-3x-10}-\frac{x+15}{x^2-25}=\frac{1}{x+2}$

2.3.28. $\frac{13}{2x^2+x-21}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{x^2-9}$

2.3.29. $\frac{9x^2-42x-15}{4x^2-21x+5}=\frac{\left(4x+1\right)^2}{16x^2-1}$

2.3.30. $\frac{19-2x}{x^2+5x+4}-\frac{2x+9}{x^2+3x+2}=\frac{4x}{x^2+6x+8}$

2.3.31. $\frac{3x-1}{x+3}-\frac{x^2-27x-10}{x^2-2x-15}=\frac{x+1}{x-5}$

2.3.32. $\frac{7}{x^2-3x-4}+\frac{3x-6}{x^2-x-2}=\frac{1}{x+1}$

2.3.33. $\frac{2x^2+15x+27}{2x^2+7x+3}+\frac{3x-6}{2x+1}=2$

2.3.34. $\frac{3x-1}{x+3}-\frac{x^2-27x-10}{x^2-2x-15}=\frac{x+1}{x-5}$

2.3.35. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

2.3.36. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

2.3.37. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$

2.3.38. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$

2.3.39. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$

2.3.40. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$

2.4. Теорема Виета и уравнения с параметрами

Решение **квадратного уравнения**

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, (*),$$

находится по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$. При этом если $D>0$, то уравнение $(*)$ имеет два различных действительных корня, если $D=0$, то уравнение $(*)$ имеет два действительных корня, которые равны между собой, если $D<0$, то уравнение $(*)$ действительных корней не имеет.

Теорема (Ф.Виет). Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $(*)$, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$

2.4.1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-\left(3a^2+4a\right)x+9a^2-16=0$ имеет корни равные 0?

2.4.2. При каких значениях параметра m корни уравнения $x^2-\left(m^2-4m\right)x+m-1=0$ равны по модулю, но противоположны по знаку?

2.4.3. Найти все значения параметра a, при которых отношение корней уравнения $x^2+ax-16=0$ равно – 4?

2.4.4. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2-2x+a=0$ удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$?

2.4.5. При каких значениях параметра m уравнение $mx^2-4x+1=0$ не имеет действительных корней?

2.4.6. При каких значениях параметра k сумма корней уравнения $x^2+\left(k^2+4k-5\right)x-k=0$ равна 0?

2.4.7. При каких значениях параметра a уравнение $x^2+2x+a^2-2a-7=0$ имеет различные корни?

2.4.8. При каких значениях параметра m произведение корней уравнения $x^2-4x+m^2-6m+5=0$ равно 0?

2.4.9. При каких значениях параметра k уравнение $x^2-2\left(k-4\right)x+k^2+6k+2=0$ имеет равные корни?

2.4.10. Найти значение параметра a, при котором один из корней уравнения $2x^2-6x+1-a=0$ больше другого на 10?

2.4.11. Определить значение параметра b, при которых одним из корней уравнения $bx^2+\left(2b+1\right)x+2b-1=0$ является число b.

2.4.12. Найти значения параметров a и b, при которых корни уравнения $4x^2+a\left(x-1\right)+b=0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1? \end{cases}$$

2.4.13. При каких значениях параметра b уравнение $2\left(b+2x\right)=b^2x+4$ имеет бесконечно много решений?

2.4.14. Указать, при каких значениях параметра t уравнение $t\left(x+2\right)-t^2x=2$ не имеет решений?

2.4.15. При каких значениях параметра a уравнение $6\left(ax-1\right)-a=2\left(a+x\right)-7$ имеет бесконечно много решений?

2.4.16. При каких значениях параметра k уравнение $2x+3=2k+3x$ имеет положительное решение?

2.4.17. При каких значениях параметра a уравнение $0{,}5\left(5x-1\right)=4{,}5-2a\left(x-2\right)$ имеет бесконечно много решений?

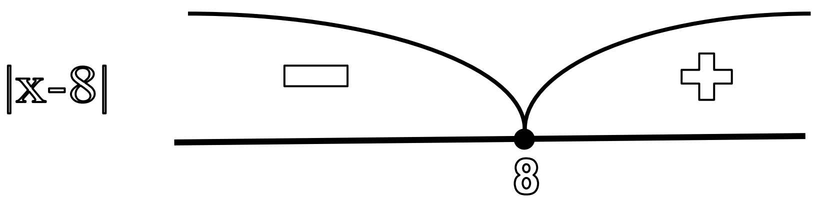
2.5. Уравнения, содержащие знак модуля

Модулем числа a называется само число $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a \langle 0 \end{cases}$

Пример. *Решить уравнение* $|x-8|=5$.

Приравняем выражение, стоящее под знаком модуля к нулю: x-8=0, значит x=8.

Обозначим на числовой оси точку x=8 и определим знаки раскрытия модуля на промежутках.



Т.к. получилось два промежутка, значит, рассмотрим два случая:
Случай 1.

Если <u>x<8</u>, то модуль раскроется со знаком «–». Модульные скобки запишем в виде обычных и перед ними поставим знак «–».

$-(x-8)=5$

Решая это уравнение получаем, что x_1=3. x_1 будет являться решением, т.к. нами рассматривалось условие, что <u>$x<8$</u> и x_1 принадлежит этому промежутку.

Случай 2.

Если <u>$x>8$</u>, то модуль раскроется со знаком «+». Модульные скобки запишем в виде обычных и перед ними поставим знак «+».

$+(x-8)=5$

Решая это уравнение, получаем, что x_2=13. x_2 будет являться решением, т.к. нами рассматривалось условие, что <u>$x>8$</u> и x_2 принадлежит этому промежутку.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=13$.

Если уравнение содержит несколько модулей, то следует приравнять к нулю каждое выражение, стоящее под знаком модуля и все полученные результаты нанести на числовую ось. Затем рассматривать знаки постоянства каждого модуля в отдельности на каждом из полученных промежутков.

Решить уравнение:

2.5.1. $|x-1|=3$

2.5.2. $|x-7|=2$

2.5.3. $|x+2|=3$

2.5.4. $|x-3|=3$

2.5.5. $|x+1|=-3x$

2.5.6. $|x+3|=2x-1$

2.5.7. $|x|=-3x-5$

2.5.8. $x^2+|x|-20=0$

2.5.9. $x^2+2-|x-3|-5x=0$

2.5.10. $x^2+5|x|+4=0$

2.5.11. $x^2-|x|-2=0$

2.5.12. $(x-1)^2+|x+1|-2=0$

2.5.13. $|x-2|-|5-x|=3$

2.5.14. $|3-x|-|x-2|=5$

2.5.15. $|2x-3|=|x|+2$

2.5.16. $|4-x|+|x-2|=2$

2.5.17. $|x+9|=|10+x|$

2.5.18. $|x-2|=3|3-x|$

2.5.19. $|x+4|+2x=|x+1|-7$

2.5.20. $|2x-1|+6x=|2x-4|+15$

2.5.21. $|5-2x|+|x+3|=2-3x$

2.5.22. $|9-x^2|=5$

2.5.23. $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$

2.5.24. $|x+5|-|x-3|+|x-1|=4$

2.5.25. $|x-1|-|x-4|+|x+1|=2$

2.5.26. $|x-2|+|x-4|-|x-3|=5$

2.5.27. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$

2.5.28. $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$

2.5.29. $\frac{3}{|x+3|-1}=|x+3|$

2.5.30. $\frac{|x^2-4|+3}{x^2+|x-5|}=1$

2.5.31. $|x^2-9|+|x-2|=5$

2.5.32. $|x|+x^3=0$

2.5.33. $|x^2-4x+3|=-\left(4+2\sqrt{3}\right)x$

2.5.34. $|4x-1|=\frac{1}{3x-1}$

2.5.35. $\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=\frac{x^2}{|x-1|}$

2.6. Иррациональные уравнения

Отметим, что уравнение $f^{2n}(x)=q^{2n}(x), n\in R,$ является, вообще говоря, следствием уравнения $f(x)=q(x)$.Поэтому, если в процессе решения обе части уравнения возводятся в четную степень, то каждый из найденных корней полученного уравнения должен проверен, является он корнем исходного уравнения или нет.

Проверка осуществляется непосредственной подстановкой корня в исходное уравнение; если при этом исходное уравнение обращается в тождество, то данный корень действительно является корнем исходного уравнения, в противном случае он является посторонним.

Пример 1. *Решить уравнение* $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$.

Решение. Так как обе части уравнения неотрицательны, их можно возвести в квадрат:

$$x-1+2\sqrt{2x^2+4x-6}+2x+6=36$$

или

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}=-3x+31$$

Снова возводим в квадрат (не проверяя область возможных решений, понадобится проверка):

$$8x^2+16x-24=9x^2-186x+961$$

откуда

$$x^2-202x+985=0$$

Получаем $x_1=5, x_2=197$, и в ходе проверки убеждаемся, что корнем является только $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Пример 2. *Решить уравнение* $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt[3]{2x-6}=\sqrt{x+1}-2$$

и возведем обе части в куб:

$$2x-6=(x+1)\sqrt{x+1}-6(x+1)+12\sqrt{x+1}-8,$$

$$(x+13)\sqrt{x+1}=8(x+1),$$

$$(x+13)^2(x+1)=64(x+1)^2,$$

$$(x+1)(x^2-38x+105)=0$$

Имеем $x_1=-1, x_2=3, x_3=35$ и в ходе проверки убеждаемся, что все найденные значения являются корнями уравнения.

Ответ: $x_1=-1, x_2=3, x_3=35$.

Решить уравнение:

2.6.1. $\sqrt{1+3x}=x+1$

2.6.2. $\sqrt{1+3x}=x-1$

2.6.3. $\sqrt{7-x}=x-1$

2.6.4. $\sqrt{x^2-11}=2x-7$

2.6.5. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=3$

2.6.6. $\sqrt{x-7}(x-5)(x+2)=0$

2.6.7. $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$

2.6.8. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6$

2.6.9. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$

2.6.10. $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$

2.6.11. $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$

2.6.12. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$

2.6.13. $\sqrt{4x-2}+\sqrt{4x+2}=4$

2.6.14. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3}=1$

2.6.15. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

2.6.16. $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$

2.6.17. $\sqrt{2x+2}=1-\sqrt{2x-2}$

2.6.18. $\left(x^2-4\right)\sqrt{x-1}=0$

2.6.19. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

2.6.20. $\dfrac{8}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{10-x}=2$

2.6.21. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+13}$

2.6.22. $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$

2.6.23. $2x^2-x\sqrt{x}-120=0$

2.6.24. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

2.6.25. $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35$

2.6.26. $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}-7\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=6$

2.6.27. $10\sqrt{x^2-x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13$

2.6.28. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=18$

2.6.29. $\dfrac{1+2\sqrt{z}}{3-\sqrt{z}}-\dfrac{11-3\sqrt{z}}{5\sqrt{z}-9}=0$

2.6.30. $8\sqrt[3]{4+x}=1+5\left(1+\sqrt[3]{4+x}\right)$

2.6.31. $\sqrt{x+3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+3}=2$

2.6.32. $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$

2.6.33. $\sqrt[3]{x^2-2x-3}=x+1$

2.6.34. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$

2.6.35. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

2.7. Задания для самостоятельной работы абитуриента

I вариант

Решить уравнения:

2.7.1. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$

2.7.2. $x\cdot\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$

2.7.3. $|x|+|x-1|=1$

2.7.4. При каком положительном значении параметра *c*, один из корней уравнения $8x^2 - 6x + 9c = 0$ равен квадрату другого?

II вариант

Решить уравнения:

2.7.5. $\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9} = \frac{3x-7}{3-4x} + \frac{6x+5}{4x+3}$

2.7.6. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$

2.7.7. $|7x-12| - |7x-11| = 1$

2.7.8. Найти коэффициенты *A* и *B* уравнения $x^2 + Ax + B = 0$, если известно, что числа *A* и *B* являются и его корнями.

2.8. Задания для подготовки к ЕГЭ

2.8.1. *Найти решение уравнения* $\sqrt{3-x} = x-1$

1)0; 2)1; 3)2; 4)3

2.8.2. *Указать промежуток, которому принадлежат корни уравнения* $\sqrt{x^2+x} = x+2$

1) $[-7,4]$; 2) $[-4,0]$; 3) $[0,2]$; 4) $[2,5]$

2.8.3. *Указать промежуток, которому принадлежат корни уравнения* $\sqrt{7-x} = x-1$

1) $[-2,0]$; 2) $[0,2]$; 3) $[2,4]$; 4) $[4,7]$

2.8.4. *Решить уравнение* $\sqrt{x} = |x-4| + 2$

1)13; 2)-27; 3)4; 4)±2

2.8.5. *Решить уравнение* $\sqrt{x} - |x-6| = 0$

1) 4;9; 2) ±3; 3) 17; 4) 2

2.8.6. *Решить уравнение* $25\cdot\sqrt{3-x} - x^2\cdot\sqrt{3-x} = 0$ (если уравнение имеет более одного корня в ответе, запишите произведение всех его корней).

Глава 3

Системы уравнений с двумя переменными

Для уравнения с двумя переменными существует, вообще говоря, бесконечно много пар чисел (a,b) таких, что при подстановке их в уравнение получаются верные числовые равенства. Если же рассматривают *два* уравнения с двумя переменными и ставится задача найти все пары чисел (a,b), таких, что при подстановке их в уравнения получаются верные числовые равенства, то говорят, что задана *система двух уравнений с двумя переменными.*

Решить систему уравнений – значит найти множество всех пар чисел, которые обращают уравнения системы в верные числовые равенства. Такие пары чисел будем называть *решением* системы. Если множество решений пусто, то систему называют несовместной.

Две системы называются *равносильными*, если они обе несовместны или если множества их решений совпадают.

Не все преобразования приводят к равносильным системам. Например, при возведении в четную степень обеих частей одного или двух уравнений системы могут получиться посторонние решения. В этом случае говорят, что получено следствие исходной системы.

Итак, *следствием* данной системы называется система, множество решений которой *шире* множества решений данной системы.

При решении систем пользуются только теми преобразованиями, при которых получаются либо равносильные системы, либо следствия. В последнем случае для отсева посторонних решений необходимо делать проверку.

Преобразования, при которых можно потерять решения системы, являются *недопустимыми*. Например, недопустимы умножение или деление обеих частей уравнений системы на выражение, содержащее переменные.

Основные методы решения систем:

- метод подстановки;
- метод алгебраического сложения уравнений;
- метод замены переменной.

Рассмотрим каждый из названных методов.

3.1. Метод подстановки

Метод подстановки, или исключения неизвестного, основан на том, что если из одного уравнения системы выразить одну переменную через другую и подставить полученное выражение во второе уравнение, то это уравнение будет содержать уже только одну переменную.

Метод подстановки является равносильным преобразованием системы, поэтому полученные решения проверять не надо.

Этот метод особенно удобен, если в одно из уравнений системы какая-нибудь переменная входит в первой степени.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ x^4 + y^2 = 16. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим $y = 4 - 2x^2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x^4 + (4 - 2x^2)^2 = 16$. Приведя это уравнение к стандартному виду, получим биквадратное уравнение $5x^4 - 16x^2 = 0$. Решая его, находим $x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad x_4 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. Подставляя найденные значения x в выражение $y = 4 - 2x^2$, находим $y_{1,2} = 4, \quad y_3 = y_4 = -\frac{12}{5}$.

Ответ: $(0; 4)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -\frac{12}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -\frac{12}{5}\right)$.

Решить системы методом подстановки:

3.1.1. $\begin{cases} x^2 - 2xy = 7, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$ **3.1.2.** $\begin{cases} x - \dfrac{x-y}{2} = 4, \\ y - \dfrac{x+3y}{x+2} = 1. \end{cases}$

3.1.3. $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x = 12y - 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

3.2. Метод алгебраического сложения уравнений

Этот метод основан на том, что если к обеим частям одного из уравнений системы прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на одно и то же число, а другое уравнение оставить без изменения, то получим систему, равносильную данной.

Обычно с помощью этого метода получают систему, к которой затем применяют метод подстановки.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 x = -2, \\ x^2 - x^2 y = 1. \end{cases}$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым. получим систему $\begin{cases} (x-y)^3 = 1, \\ x^2 - x^2 y = 1. \end{cases}$ Из первого уравнения находим $y = x - 1$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим кубическое уравнение $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. Так как сумма коэффициентов многочлена равна 0, то один из корней равен 1. Разделим левую часть уравнения на $x-1$ и получим второй множитель: $(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$. Решая это уравнение, находим его корни:
$x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Подставляя найденные значения x в выражение $y = x - 1$, находим $y_1 = 0,\ y_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ y_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: (1; 0), $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Используя метод алгебраического сложения, решить системы уравнений:

3.2.1. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 208, \\ 3x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$ **3.2.2.** $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

3.2.3. $\begin{cases} (2x-5)^2 + (3y-2)^2 = 17, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases}$

3.3. Метод замены переменной

Этот метод выгодно использовать при решении симметрических систем или систем, содержащих однородное уравнение.

3.3.1. Симметрические системы

Функция $f(x, y)$ называется *симметрической*, если для всех x и y выполнено равенство $f(x, y) = f(y, x)$.

Пример. Многочлен $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15$ является симметрической функцией, так как

$$f(y, x) = 3y^2 - 2yx + 3x^2 + 15 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15 = f(x, y).$$

Теорема (о симметрических многочленах). Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть представлен в виде функции от двух основных симметрических многочленов $u(x, y) = x + y$ и $v(x, y) = xy$.

Пример. $x^2 + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$.

Теорема о симметрических многочленах применяется для упрощения систем $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases}$ где левые части уравнений – симметрические функции.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 y + xy^3 = 10, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Решение. Эта система является симметрической, поэтому делаем замену $u = x + y,\ v = xy$. Так как $x^3 y + xy^3 = xy(x^2 + y^2)$, а из второго уравнения $x^2 + y^2 = 5$, то $x^3 y + xy^3 = 5xy = 5v$.

Так как $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, то второе уравнение системы: $u^2 - 2v = 5$. Имеем: $\begin{cases} 5v = 10, \\ u^2 - 2v = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2, \\ u^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 2, \\ u = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} v = 2, \\ u = -3. \end{cases} \end{array} \right.$

Перейдем к переменным x и y. Первая система совокупности дает следующие результаты:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ x(3 - x) = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Вторая система имеет решения $(-1,-2),\ (-2,-1)$.

Ответ: $(1,2),\ (2,1),\ (-1,-2),\ (-2,-1)$.

Решить системы, используя замену переменных:

3.3.1.1. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$

3.3.1.2. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12. \end{cases}$

3.3.1.3. $\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11. \end{cases}$

3.3.1.4. $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92, \\ xy=3. \end{cases}$

3.3.2. Системы, содержащие однородное уравнение

Уравнение с двумя переменными $f(x,y)=0$ называется *однородным*, если $f(kx,ky)=k^m f(x,y)$. При $m=0;1;2;\ldots$ однородное уравнение называется уравнением соответственно нулевой, первой, второй и т. д. *степени.*

Другими словами, уравнение $f(x,y)=0$ называется однородным уравнением степени *m* относительно *x* и *y*, если $f(x,y)$ – однородный многочлен степени *m*, то есть степень каждого его одночлена равна одному и тому же числу *m*.

Пример. Уравнение $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=15$ однородное, а уравнение $3x^2-xy+2y^2=15$ таковым не является.

Действительно, представив первое из данных уравнений в форме $f(x,y)=0$, получаем:

$$f(kx,ky)=\frac{kx}{ky}-\frac{ky}{kx}-15=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-15=k^0\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-15\right)=k^0 f(x,y).$$

Это значит, что первое уравнение является однородным, причем нулевой степени.

Второе уравнение дает

$$f(kx,ky)=3k^2x^2-k^2xy+2k^2y^2-15=k^2\left(3x^2-xy+2y^2\right)-15,$$

что не равно $k^m f(x,y)$. Таким образом, второе уравнение однородным не является. Кстати, можно было сразу увидеть неоднородность второго уравнения, так как в многочлене $3x^2-xy+2y^2-15$ все члены, кроме последнего, второй степени, а число 15 является одночленом нулевой степени.

Системы, содержащие однородное уравнение, легко свести к системам, где зависимость между неизвестными x и y в одном из уравнений – линейная, то есть имеющая вид $y = ax$, где a – неизвестный параметр. Это облегчает применение метода подстановки.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы однородное, поэтому вводим в него замену $y = ax$:

$$3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + ax^2 - 2a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 + a - 2a^2) = 0.$$

Так как $x = 0$ ни при каком значении y не входит в решение системы, то полученное в результате замены уравнение означает, что $3 + a - 2a^2 = 0$, что дает $a = -1$ или $a = \frac{3}{2}$.

Таким образом, $y = -x$ или $y = \frac{3}{2}x$, и данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем ее:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x, \\ 2x^2 + 3x^2 + x^2 = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ 2x^2 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^2 = -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x, \\ 6x^2 = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ x^2 - 4 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система не имеет решения, так как множество решений уравнения $6x^2 = -1$ пусто. Вторая система дает решения $(2; 3)$, $(-2; -3)$.

Ответ: $(2; 3)$, $(-2; -3)$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases}2x^2 - xy - 3y^2 = 3,\\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4.\end{cases}$

Решение. Ни одно из уравнений системы не является однородным, однако в левой части уравнений стоят однородные функции. Применим стандартный приём, который позволяет свести систему такого вида к однородному уравнению. Умножим первое уравнение на 4, а второе на 3 и вычтем из первого уравнения второе.

Имеем: $4(2x^2 - xy - 3y^2) - 3(2x^2 - 3xy + 2y^2) = 4\cdot 3 - 3\cdot 4$, или

$2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0$. Полученное однородное уравнение запишем в системе с одним из данных: $\begin{cases}2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0,\\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3.\end{cases}$

В однородном уравнении производим замену $y = ax$:

$2x^2 + 5ax^2 - 18a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2 + 5a - 18a^2) = 0$.

Если $x = 0$, то из первого уравнения системы получаем $y = 0$, но пара (0; 0) не удовлетворяет второму уравнению, а, значит, и системе. Поэтому $x \neq 0$. Но тогда $2 + 5a - 18a^2 = 0$, откуда $a = \frac{1}{2}$ или $a = -\frac{2}{9}$. Получаем следующие зависимости между *x* и *y*: $x = 2y$ или $x = -4{,}5y$.

Таким образом, данная система равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2y,\\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -4{,}5y,\\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2y,\\ 8y^2 - 2y^2 - 3y^2 = 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -4{,}5y,\\ \frac{81}{2}y^2 + \frac{9}{2}y^2 - 3y^2 = 3;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2y,\\ y^2 = 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -4{,}5y,\\ y^2 = \frac{1}{14}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, последней совокупности удовлетворяют четыре пары, которые и являются решением данной системы.

Ответ: (2, 1), (-2, -1), $\left(-\frac{9}{2\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(\frac{9}{2\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Решить системы уравнений:

3.3.2.1. $\begin{cases}x^2 + 3y^2 = 7,\\ xy + y^2 = 3.\end{cases}$

3.3.2.2. $\begin{cases}x^2 - 4y^2 = 9,\\ xy + 2y^2 = 18.\end{cases}$

3.3.2.3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2 y + xy^2 = 1. \end{cases}$

3.3.2.4. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} + \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1. \end{cases}$

3.3.2.5. $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

3.3.2.6. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 12y - 21 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + 2xy + x = 0. \end{cases}$

3.4. Задания для самостоятельной работы

Решить системы уравнений:

3.4.1. $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 1 \end{cases}$

3.4.2. $\begin{cases} 3y^2 - 2xy = 160 \\ y^2 - 3xy - 2x^2 = 8 \end{cases}$

3.4.3. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

3.4.4. $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -16 \end{cases}$

3.4.5. $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$

3.4.6. $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}$

3.4.7. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}$

3.4.8. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases}$

3.4.9. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 133 \\ x - y = 7 \end{cases}$

3.4.10. $\begin{cases} x + 2xy + y = 10 \\ x - 2xy + y = -2 \end{cases}$

3.4.11. $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$

3.4.12. $\begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2(x + y) = 2 \end{cases}$

3.4.13. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$

3.4.14. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ 4x - 4y = xy \end{cases}$

3.4.15. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ (x - 2)(y - 1) = 0 \end{cases}$

3.4.16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = 9 \end{cases}$

3.4.17. $\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

3.4.18. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = 5\dfrac{1}{5} \\ xy = 6 \end{cases}$

3.5. Задания для подготовки к ЕГЭ

Задания с выбором ответа (уровень части А)

3.5.1. Найти значение выражения $x^2 + y^2$, где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 4 = -y. \end{cases}$

1) 17 2) 5 3) 13, 4) 10

3.5.2. Вычислить значение разности $x - y$, где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ (3x + 7y)(x - 3y) = 11. \end{cases}$

1) -2 2) 7 3) 3 4) -3

3.5.3. Вычислить сумму положительных значений x и y, где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5. \end{cases}$

1) 11 2) 8 3) 7 4) 14

Задания с кратким ответом (уровень части В)

3.5.4. Вычислить наибольшее значение $\frac{x}{y}$, где $x < 0,\ y < 0$ и (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{x + y}{y - 1} = 6, \\ 2y - xy = -4. \end{cases}$

3.5.5. Вычислить значение произведения xy, где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 200. \end{cases}$

3.5.6. Вычислить значение отношения $\frac{x}{y}$, где $x > y$ и (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ x^2 y + xy^2 = 12. \end{cases}$

Задания с развернутым ответом (уровень части С)

Пример. Найти количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases}(3-x)\,y = 3x-11,\\ x+\left(\dfrac{y+3}{x^2}\right)^{0,5} = 1+\sqrt{y+3}.\end{cases}$$

Решение.

1) Во втором уравнении системы выражение $y+3$ стоит под знаком корня четной степени, следовательно, $y+3\ge 0$.

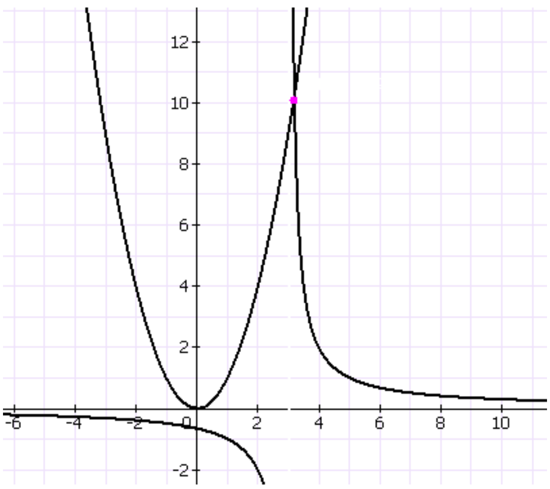
2) Так как $x=3$ ни при каком значении *y* не удовлетворяет первому уравнению системы, то разделим левую и правую часть этого уравнения на $3-x$: $y=\dfrac{3x-11}{3-x}$. Отсюда $\mathrm{y}+3.=\dfrac{3\mathrm{x}-11}{3-\mathrm{x}}+3=\dfrac{2}{\mathrm{x}-3}$

Но из пункта 1) это выражение неотрицательно, следовательно, $x>3$.

3) Перепишем второе уравнение системы в следующем виде: $x+\dfrac{\sqrt{y+3}}{\sqrt{x^2}}=1+\sqrt{y+3}$. Так как $x>3$, то $\sqrt{x^2}=x$. Кроме того, ввиду положительности значения *x* можно умножить левую и правую часть этого уравнения на *x*, тогда уравнение примет вид: $x^2+\sqrt{y+3}=x+x\cdot\sqrt{y+3}$, или $x(x-1)=(x-1)\sqrt{y+3}$, откуда $x=1$ или $x=\sqrt{y+3}$.

4) При $x=1$ $y=-4$. Это одно из решений системы.

5) Если $x=\sqrt{y+3}$, то ввиду того, что $x>3$, операция возведения обеих частей последнего равенства в квадрат – равносильное преобразование. Получаем $x^2=y+3$, откуда $y=x^2-3$. Подставив это выражение в первое уравнение системы, получим уравнение, зависящее только от *x*: $x^2=\dfrac{2}{x-3}$. Нужно ответить на вопрос, имеет ли это уравнение корни.



6) В одной и той же системе координат построим графики функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=\dfrac{2}{x-3}$. Очевидно, точка пересечения графиков этих

функций существует, следовательно, существует и второе решение данной системы.

Ответ: система имеет два решения.

Выполнить задания с развернутым ответом:

3.5.7. Найти количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 7 - 3x - x^3, \\ x + \left(\dfrac{x^2}{y+2}\right)^{-0,5} = 1 + \sqrt{y+2}. \end{cases}$$

3.5.8. Найти количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + xy + 9x + y = 0, \\ \left(\dfrac{(x+1)^2}{y+5}\right)^{-0,5} = \sqrt{y+5} - x. \end{cases}$$

3.5.9. Найти количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + xy = 7, \\ x + \sqrt{\dfrac{y-1}{x^2}} = 1 + \sqrt{y-1}. \end{cases}$$

Глава 4

Решение рациональных неравенств

4.1. Числовые неравенства и их свойства

Действительные числа можно сравнить, т.е. для любых неравных действительных чисел a и b можно указать, какое число больше, а какое меньше.

Говорят, что a больше числа $b(a > b)$, если разность $a - b$ положительна, если же разность $a - b$ отрицательна, то говорят, что число a меньше числа $b(a < b)$. При этом выражения $a < b, a > b$ называют строгими неравенствами.

С геометрической точки зрения неравенство $a > b(a < b)$ означает, что точка a расположена на числовой прямой правее (левее) точки b.

Рассматривают также нестрогие неравенства вида $a > b$ и $a < b$. Запись $a \geq b$ означает, что число a либо больше числа b, либо равно числу b.

Неравенства бывают верными (истинными) и неверными (ложными). Например, $3 > 2; 10 \geq 10; \pi > 3{,}14 -$верные неравенства. Примерами неверных неравенств могут служить следующие неравенства: $3 < 2; 10 > 10; \pi < 3{,}14$.

Пример. *Сравнить числа* $-\frac{1}{3}$ и $0{,}34$.

Решение. Найдем разность данных чисел:
$\frac{1}{3} - 0{,}34 = \frac{1}{3} - \frac{34}{100} = \frac{1 \cdot 100 - 34 \cdot 3}{300} = -\frac{2}{300}$

Вывод: $\frac{1}{3} < 0{,}34$

Основные свойства числовых неравенств.

Для действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства:

(1) если $a > b,$то $b < a;$

(2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c;$

(3) если $a > b,$то $a + c > b + c;$

(4) если $a > b, c > 0,$ то $ac > bc;$

(5) если $a > b, c < 0,$то $ac < bc;$

(6) если $a > b, c > b$, то $a + c > b + d$;

(7) если $a > b > 0, c > d > 0$, то $ac > bd$;

(8) если $a > b > 0$, n∈R, то $a^n > b^{n;}$

(9) если $a > 0, b > 0$, n∈R, $a^n > b^{n;}$ то $a > b$;

(10) если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Решение неравенств с одним неизвестным.

Рассмотрим неравенство: $f(x) > g(x)$.

Областью допустимых значений (ОДЗ) этого неравенства назовем множество значений x, при которых существуют обе части этого неравенства.

Решением данного неравенства называется любое число из области допустимых значений, которое при подстановке в неравенство обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество всех его решений. Если множеством решений неравенства является пустое множество, то говорят, что данное неравенство решений не имеет.

Два неравенства называются равносильными, если они имеют одинаковые множества решений. Например, неравенства $\frac{1}{x} > 0$ и $\sqrt{x} > 0$ равносильны, так как и первое неравенство и второе имеют одно и то же множество решений – интервал $x \in (0; +\infty)$.

Если при решении уравнений можно в процессе преобразований переходить не только к равносильному уравнению, но и к уравнению-следствию, а затем с помощью проверки отсеивать приобретенные «посторонние» решения, то при решении неравенств, как правило, получается бесконечное множество решений, что затрудняет выполнение проверки. Поэтому при решении неравенств необходимо следить за равносильностью преобразований. При этом используют следующие утверждения о равносильности неравенств.

1. Неравенства $f(x) < g(x) > f(x)$ равносильны.
2. Неравенства $f(x) < g(x)$ и $f(x) - g(x) < 0$ равносильны.
3. Неравенства $f(x) + \varphi(x) < g(x)$ и $f(x) < g(x) - \varphi(x)$ равносильны.
4. Если в левой и правой части неравенства $f(x) < g(x)$ прибавить одно и то же выражение $p(x)$, имеющее смысл при любых x из области допустимых значений данного неравенства, то получится неравенство $f(x) + p(x) < g(x) + p(x)$ равносильное данному.

5. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)p(x)<g(x)p(x)$ равносильны, если $p(x)>0$ для всех x из области допустимых значений неравенства $f(x)<g(x)$.

В частности, неравенства $f(x)<g(x)$ и $af(x)<ag(x)$ равносильны для любого положительного числа a.

6. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)p(x)>g(x)p(x)$ равносильны, если $p(x)<0$ для всех x из области допустимых значений неравенства $f(x)<g(x)$.

В частности, неравенства $f(x)<g(x)$ и $af(x)>ag(x)$ равносильны для любого отрицательного числа a.

7. Если выражения $g(x)$ и $p(x)$ тождественно равны, то неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)<p(x)$ равносильны.

8. Если обе части неравенства $f(x)<g(x)$ неотрицательны при всех x из области допустимых значений данного неравенства, то после возведения их в натуральную степень n получится неравенство $f^n(x)<g^n(x)$, равносильное данному.

Аналогичные утверждения имеют место и для нестрогих неравенств $f(x)\ge g(x)$ и $f(x)\le g(x)$.

Пример.

Равносильны ли неравенства: $\sqrt{x^2+6x+9}<5$ и $x+3<5$

Решение. Неравенства неравносильны. Действительно,

$$\sqrt{x^2+6x+9}<5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2}>5 \Leftrightarrow |x+3|<5$$

Неравенство $x+3<5$ будет верным и тогда, когда $x+3<-5$, например, при $x=-100$. Первое же неравенство верно лишь когда $-5<x+3<5$, т. е., при $x=-100$ оно неверно.

Ответ: неравенства неравносильны.

Определить равносильность неравенств:

4.1.1. $\sqrt{x}(x+2)>\sqrt{x}(2x-5)$ и $x+2>2x-5$.

4.1.2. $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}<2$ и $2x^2-11x+15>0$.

4.1.3. *Определить равносильность неравенства и системы неравенств:* $\sqrt{x^2-4}(x^2-2) \le \sqrt{x^2-4}$ и $\begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ x^2-2 \le 1 \end{cases}$

4.2. Решение линейных неравенств

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax > b$ (вместо знака > может быть и любой другой знак неравенства), $a \ne 0$, $x \in R$.

Решение линейных неравенств:

1) если $a > 0$, то $x > \dfrac{b}{a}$;
2) если $a < 0$, то $x < \dfrac{b}{a}$;
3) если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство выполняется для любого $x \in R$;
4) если $a = 0$ и $b \ge 0$, то неравенство не имеет решений.

Пример. *Решить неравенство*: $5-2x > x-1$.

Решение. Для решения неравенства выполним равносильные преобразования: $5-2x > x-1 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < 2$

Ответ: $x \in (-\infty;2)$

Решить неравенства:

4.2.1. $-3x > -9$

4.2.2. $3x+11 > -4x+25$

4.2.3. $\dfrac{2x-3}{10} - \dfrac{5x+1}{6} > 2$

4.2.4. $\dfrac{3x-5}{5} - \dfrac{x+1}{2} < 1 - \dfrac{x}{4}$

4.2.5. Найти целые решения неравенства $\dfrac{3x-7}{4} < \dfrac{2x-3}{5} + 1$.

4.2.6. При каких значениях x дробь $\dfrac{4x-16}{35}$ положительна?

Найти наибольшее целое решение неравенства:

4.2.7. $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{3x-1}{2} > 1$

4.2.8. $\dfrac{8x+4}{11} - \dfrac{9x-5}{10} > 2$

4.2.9. $\dfrac{7x+1}{9} - \dfrac{4x-5}{5} > 1$

4.2.10. $\dfrac{6x-2}{7} - \dfrac{7x-2}{8} > -\dfrac{4}{3}$

4.2.11. $\frac{9x+2}{10}-\frac{10x-2}{9}>2$

4.2.12. $\frac{7x+3}{8}-\frac{6x-2}{5}>1.5$

4.2.13. $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-8}{6}>\frac{1}{6}$

4.2.14. $\frac{5x-3}{3}-\frac{8x-2}{6}>-\frac{8}{7}$

4.2.15. $\frac{5x-1}{4}-\frac{8x-3}{5}\geq-\frac{3}{2}$

4.2.16. $\frac{5x-2}{8}-\frac{3x-1}{4}>-\frac{2}{3}$

Решить неравенства:

4.2.17. $8+\frac{6x-5.5}{10}>\frac{x-2}{6}+\frac{1-5x}{8}+\frac{1}{4}$

4.2.18. $3(2x-1)-\frac{3}{4}<\frac{x+2}{2}-7$

4.2.19. $\frac{2x-1}{4}-\frac{3(x+1)}{2}<\frac{x-1}{2}+3$

4.2.20. $3+\frac{2x-9}{2}>\frac{15-3x}{6}-\frac{9-12x}{3}$

4.2.21. $\frac{x-1}{3}-\frac{3(x+2)}{2}-4>0$

4.2.22. $2\frac{1}{4}-(x+7)<3-2(3x+1)$

4.2.23. $\frac{x-3}{6}+5<\frac{3x+27}{20}-\frac{x+9}{12}$

Найти наибольшие целые решения неравенств:

4.2.24. $\frac{3x+2}{4}-\frac{x-3}{2}<3$

4.2.25. $\frac{x-2}{5}-\frac{2x+3}{3}>1$

Найти наименьшие целые решения неравенств:

4.2.26. $\frac{x}{6}-\frac{x}{7}<1$

4.2.27. $3x\geq-\frac{1}{3}$

4.2.28. $\frac{5x}{11}-\frac{x+2}{4}\geq3$

4.2.29. $\frac{2x+2}{5}-\frac{x-1}{2}<2$

4.2.30. $2(x-3)-1>3(x-2)-4(x+1)$

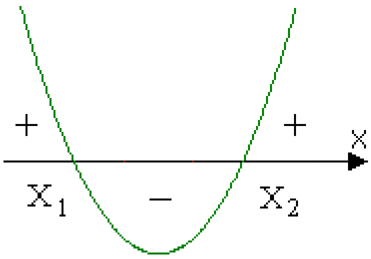
4.2.31. $\frac{2x-5}{3}-1>3-x$

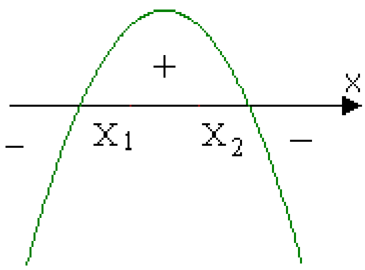
4.3. Решение квадратных неравенств

Квадратным называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0, a\neq 0$. *Решение квадратных неравенств*:

1) если дискриминант $D=b^2-4ac>0$, то расположение знаков квадратного трехчлена следующее (x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена):

$a>0$ $\qquad\qquad$ $a<0$



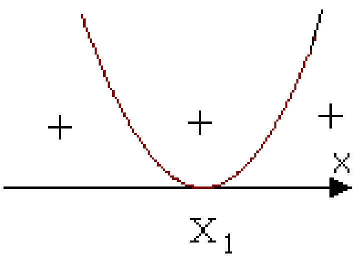


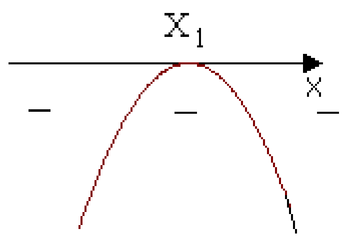
$x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2;\infty)$ $\qquad\qquad$ $x\in(x_1;x_2)$

Рис. 1.

2) если дискриминант $D=b^2-4ac=0$, то корни квадратного трехчлена совпадают: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ (парабола $y=ax^2+bx+c$ касается оси OX):

$a>0$ $\qquad\qquad$ $a<0$





$x\in(-\infty; x_1)\cup(x_1;\infty)$ $\qquad\qquad$ $x\in\varnothing$

Рис. 2.

3) если дискриминант $D=b^2-4ac<0$ (квадратный трехчлен не имеет корней), то для всех $x\in(-\infty;\infty)$ знак квадратного трехчлена совпадает со знаком a:

$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

$x \in (-\infty; \infty)$ $\qquad\qquad$ $x \in \varnothing$

Рис. 3.

Пример 1. *Решить неравенство:* $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на (-1) и получим равносильное: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 2 = 0$ являются 1 и 2. Расставим знаки в промежутках знакопостоянства и получим ответ $x \in [1; 2]$.

Ответ: $x \in [1; 2]$.

Пример 2. *Решить неравенство:* $x^2 - 4x + 4 < 0$.

Решение. Уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$ имеет ровно один корень $x = 2$. При всех $x \in (-\infty; \infty)$ выполняется $x^2 - 4x + 4 \geq 0$, а значит, исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Решить неравенство:

4.3.1. $x^2 + x - 6 > 0$

4.3.2. $x^2 - 8x + 16 > 0$

4.3.3. $x^2 + 4x + 20 < 0$

4.3.4. $1 + x - 2x^2 < 0$

4.3.5. $3x^2 - 12x + 12 \leq 0$

4.3.6. $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$

4.3.7. $2x^2 - 12x + 18 > 0$

Найти наибольшие целые решения неравенств:

4.3.8. $x^2 + x + 1 < 0$

4.3.9. $-x^2 - 5x + 6 \geq 0$

4.3.10. $x - x^2 + 2 \geq 0$

4.3.11. $x^2 < 16$

4.3.12. $3x^2 - 7x + 2 < 0$

Найти наибольшие целые отрицательные решения неравенств:

4.3.13. $x^2 > 9$

4.3.14. $x^2 > 5x - 6$

Найти целочисленные решения неравенств:

4.3.15. $2x^2-9x+4<0$

4.3.16. $2x^2-3x-2<0$

4.3.17. $2x^2-5x+2<0$

4.3.18. $2x^2-5x-3<0$

4.3.19. $x^2-6x+5<0$

4.3.20. $x^2-5x+4<0$

4.3.21. $x^2-2x-3<0$

4.3.22. $x^2-4x+3<0$

4.3.23. $x^2-x-2<0$

4.3.24. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $x^2-10x-5\geq a$ выполняется для любого действительного числа.

4.3.25. При каких значениях m неравенство $x^2-2mx+1>0$ выполняется при всех значениях x?

4.3.26. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $\left(a^2-1\right)x^2+2\left(a-1\right)x+1>0$ при всех значениях x?

4.3.27. Решить неравенство $4\left(x+1\right)^2-\dfrac{x+3}{2}>\left(2x-1\right)^2+3$.

4.3.28. При каких значениях m неравенство $x^2-mx>\dfrac{2}{m}$ выполняется для любых x?

4.3.29. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2-4x+a+3<0$ выполняется для всех действительных x?

4.3.30. При каких значениях параметра b неравенство $x^2-2\left(b+1\right)x+4b+1\geq 0$ выполняется для всех действительных x?

Найти наименьшие целые решения неравенств:

4.3.31. $3x^2-4x+5\leq 0$

4.3.32. $\left(x-2\right)^2<25$

4.3.33. $4x^2+4x+1\leq 0$

4.3.34. $-2x^2+x+1\geq 0$

4.3.35. При каких значениях параметра a неравенство $(a+1)x^2-2\left(a-1\right)x+3a-3\geq 0$ выполняется при всех значениях x?

4.3.36. При каких значениях a неравенство $\dfrac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для любых значений x?

4.3.37. Найти значения параметра m, при которых неравенство $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2\left(m+1\right)x+9m+4}<0$ выполняется для любых значений x.

4.3.38. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется для любых x?

4.3.39. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ выполняется для любых x?

4.4. Решение рациональных неравенств методом интервалов

Рассмотрим метод интервалов на решении неравенства $P_m(x)\cdot Q_n(x)>0$ или $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}>0,$ где $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены (вместо знака > может быть и любой другой знак неравенства).

Исходя из свойств функций (непрерывности, монотонности, сохранения знаков) $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ можно применить метод интервалов, который заключается в следующей последовательности действий:

1) Найдем область допустимых значений неравенства.
2) Найдем корни многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби.
3) Отметим корни на числовой оси с учетом ОДЗ.
4) Отмеченные точки разобьют числовую ось на интервалы, в каждом из которых дробь в левой части неравенства сохраняет свой знак.
5) Определим знак этой дроби на каждом интервале и в решение неравенства включим все те интервалы, знак в которых совпадает со знаком неравенства.

При расстановке знаков в полученных интервалах можно использовать следующее правило. На самом правом интервале знак определяют подстановкой произвольно выбранного значения из этого интервала. При этом получится знак «+», если старшие коэффициенты многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ одного знака, и знак «$-$», если они разных знаков. Далее двигаются справа налево. При переходе через точку x_i знак меняется на противоположный, если среди корней числителя и знаменателя x_i встречается нечетное число раз и не меняется, если x_i встречается четное число раз. При этом количество корней $x = x_i$ считают по количеству множителей вида $\left(x - x_i\right)$ в рациональном выражении.

Пример 1. *Решить неравенство:* $(x-5)^5(x+3)^2(x+5)(x-4)^{14} \ge 0$.

Решение. Отметим на числовой оси нули многочлена, стоящего в левой части неравенства. При $x > 4$ все множители положительны. При переходе через точку $x = 4$ многочлен не меняет знак, так как двучлен $(x - 4)$ входит в чётной степени. При переходе через точку $x = 1$ знак многочлена изменится, так как $(x - 1)$ входит в нечётной степени. На промежутке $(–5; –3)$ многочлен отрицателен, так как при переходе через точку $x = –3$ он не изменит знак (множитель $(x + 3)$ в чётной степени). При переходе через точку $x = –5$ знак опять меняется, так как $(x + 5)$ входит в первой степени.

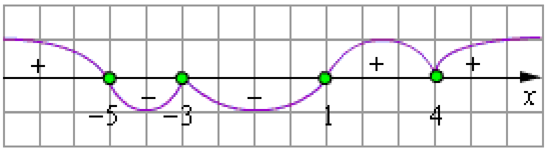


Рис. 4.

Далее, объединяя интервалы, записываем интервалы значений x, которые удовлетворяют данному неравенству: $x \in (-\infty;-5) \cup \{-3\} \cup [1;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-5) \cup \{-3\} \cup [1;+\infty)$.

Пример 2. *Решить неравенство*: $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 8} \ge 0$

Решение.

Имеем: $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 8} = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+4)} \ge 0, x \ne 2$.

Заметим, что на двучлен $(x - 2)$ можно спокойно сокращать; встретившись и в числителе и в знаменателе, он не будет влиять на знак неравенства. Надо лишь не забыть, что $x \ne 2$, так как при $x = 2$ не определён знаменатель данной дроби.

Наносим на числовую ось нули числителя и знаменателя и, строя кривую знаков, согласно методу интервалов, получаем:

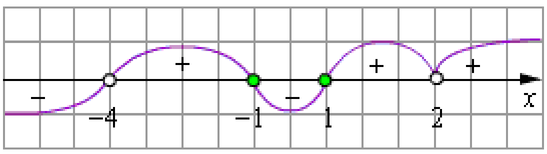


Рис. 5.

Далее, рассматривая интервалы значений x, удовлетворяющие заданному неравенству, записываем ответ.

Ответ: $x \in (-4;-1] \cup [1;2) \cup (2;+\infty)$.

Решить неравенства методом интервалов:

4.4.1. $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$

4.4.2. $\frac{2}{2x+3} > \frac{1}{4}$

4.4.3. $\frac{3}{x} > \frac{1}{2}$

4.4.4. $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{7}$

4.4.5. $\frac{1}{x} > \frac{1}{5}$

4.4.6. $\frac{4}{x+3} > \frac{1}{5}$

4.4.7. $\frac{3}{x} > \frac{1}{4}$

4.4.8. $\frac{3}{x-2} > \frac{1}{8}$

4.4.9. $\frac{4}{x} > \frac{1}{4}$

4.4.10. $\frac{2x-10}{x-1} > 1$

Найти целочисленные решения неравенств:

4.4.11. $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$

4.4.12. $\frac{2x-3}{x+1} < 0$

4.4.13. $\frac{2-3x}{2x+5} > 0$

4.4.14. $\frac{7x-12}{1-6x} > 0$

4.4.15. $\frac{4x+3}{2-0{,}5x} > 0$

4.4.16. $\frac{3-5x}{1+0{,}5x} > 0$

4.4.17. $\frac{0{,}6x+1}{5x+2} < 0$

4.4.18. $\frac{0{,}5-x}{6-2x} < 0$

4.4.19. $\frac{2-2x}{2x+3{,}45} > 0$

4.4.20. $\frac{7x-15}{3x+3} < 0$

Найти наибольшие целые решения неравенств:

4.4.21. $(x-1)(x+1) \le 0$

4.4.22. $\frac{x-4}{x-2} \le 0$

4.4.23. $x(7-x) > 0$

4.4.24. $\frac{x}{x-3} \le 0$

4.4.25. $x^2(x-1)(x+2) \le 0$

4.4.26. $x^2(3-x)(x+1) > 0$

Найти наибольшие целые отрицательные решения неравенств:

4.4.27. $\dfrac{x+5}{x-3}>0$

4.4.28. $\dfrac{x^2+x}{x-3}>0$

4.4.29. $x^3-4x<0$

4.4.30. $\dfrac{x^2-x-2}{x}\ge 0$

Решить неравенства:

4.4.31. $x^4-6x^3+11x^2-6x<0$

4.4.32. $(x-1)^5(x+2)(2x-10-x^2)<0$

4.4.33. $216x^6+19x^3\le 1$

4.4.34. $x^2(x+2)(x-3)\ge 0$

4.4.35. $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$

4.4.36. $\dfrac{3}{6x^2x-12}<\dfrac{25x-47}{10x-15}-\dfrac{3}{3x+4}$

4.4.37. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$

4.4.38. $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)^5(x-4)>0$

4.4.39. $x(x-1)(x+2)(x-3)\le 7$

4.4.40. $\dfrac{1}{3x-2-x^2}>\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$

4.4.41. $\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{5-x}{x-4}-\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{6-x}{x-4}\ge\dfrac{5(6-x)}{x-2}$

4.4.42. $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$

4.4.43. $\dfrac{x-10}{2-x}>1$

4.4.44. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x+3)^4}\ge 0$

4.4.45. $\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\ge 1$

4.4.46. $(x-2)^2<25$

4.4.47. $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$

4.4.48. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$

4.4.49. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$

4.4.50. $a^4+a^3-a-1<0$

4.4.51. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$

4.4.52. $x^6-9x^3+8>0$

4.4.53. $m^3+m^2-m-1>0$

4.4.54. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$

4.4.55. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$

4.4.56. $\frac{15}{4+3x-x^2}>1$

4.4.57. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leq 0$

4.4.58. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$

4.4.59. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$

4.4.60. $\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2}<0$

4.4.61. $\frac{2-x}{x^3+x^2}>\frac{1-2x}{x^3-3x^2}$

4.4.62. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leq\frac{1-2x}{x^3+1}$

4.4.63. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$

4.4.64. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$

4.4.65. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0$

4.4.66. $x^2(x+3\sqrt{5})+5(3x+\sqrt{5})>0$

4.4.67. $\frac{x^2-6x}{x^2+6x+9}\leq 0$

4.4.68. $\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x+1}<1$

4.4.69. $\frac{x-10}{2-x}>1$

4.4.70. $\frac{x^2+6x}{4-3x-x^2}\geq 0$

4.4.71. $x^6+9x^3+8\leq 0$

4.4.72. $\frac{x+2}{3-x}>2$

4.4.73. $\frac{1}{x-3}\leq-\frac{1}{10}$

4.4.74. $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\leq 1$

4.4.75. $\frac{x^2+9x+20}{x+4}>0$

4.4.76. $\frac{3-2x}{x^2+3}\geq 1$

4.4.77. $\frac{x^3+27}{x}\leq 0$

Решить неравенства:

4.4.78. $3(x^2-x+1)(x+2)^4(x+1)^3(x-2)^2(3-5x)\geq 0$.

4.4.79. $\frac{x^2(x^2+1)(x+1)^2(x-3)}{(x^2-x-2)(2-x)^3(x+3)}\leq 0$

Найти длины интервалов, на которых выполняются неравенства:

4.4.80. $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$

4.4.81. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}<0$

4.4.82. $\dfrac{x-1}{x+5}\geq 2$

4.4.83. $\dfrac{2x^2+x-1}{-x^2+5x-7}>0$

4.4.84. $\dfrac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2}>0$

Найти середины интервалов, на которых выполняются неравенства:

4.4.85. $\dfrac{x^2-36}{x^2+6x}<0$

4.4.86. $\dfrac{x^2-5x+12}{x^2-4x+5}>3$

4.4.87. $\dfrac{x^2+5x+8}{x^2+1}>2$

4.4.88. $\dfrac{x^2+2x+1}{x+6-x^2}\geq 0$

4.4.89. $\dfrac{x-1}{x+3}>3$

4.4.90. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4x}\leq 0$

Найти среднее арифметическое целых решений для каждого из неравенств:

4.4.91. $x^4-10x^2+9\geq 0$

4.4.92. $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}\geq 0$

4.4.93. $\dfrac{(x-1)(x+3)^2}{-x-1}\geq 0$

4.4.94. $-\dfrac{3}{x}\leq -\dfrac{1}{2}$

Найти наименьшие натуральные решения неравенств:

4.4.95. $x>\dfrac{15}{x+2}$

4.4.96. $\dfrac{x^2-2x-1}{x+1}<x$

4.4.97. $\dfrac{6x^2-15x+19}{3x^2-6x+7}<2$

4.4.98. $\dfrac{2}{x-1}<4$

4.4.99. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}<0$

4.4.100. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geq\dfrac{1}{x}$

Найти набольшие целые решения неравенств:

4.4.101. $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}\le 0$

4.4.102. $\dfrac{x^2-1}{2x+5}\le 0$

4.4.103. $\dfrac{x^2+7x-13}{x^2+1}\le 1$

4.4.104. $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x+7}\le 0$

4.4.105. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\ge \dfrac{5}{4}$

4.4.106. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(2-x)^5}\le 0$

Решить неравенства:

4.4.107. $\dfrac{7}{x}-\dfrac{x}{7}>0$

4.4.108. $\dfrac{x}{2}<\dfrac{8}{x}$

4.4.109. $\dfrac{9}{x}>\dfrac{x}{4}$

4.4.110. $\dfrac{x}{11}-\dfrac{11}{x}>0$

4.4.111. $x<\dfrac{64}{x}$

4.4.112. $\dfrac{3}{x}>\dfrac{x}{27}$

4.4.113. $\dfrac{x}{20}-\dfrac{5}{x}<0$

4.4.114. $\dfrac{36}{x}>\dfrac{x}{4}$

4.4.115. $\dfrac{x}{4}<\dfrac{1}{x}$

4.4.116. $\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{x}<0$

4.4.117. $\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{3-x}<0$

4.4.118. $\dfrac{3}{5-x}>\dfrac{4}{x}$

4.4.119. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x+7}<0$

4.4.120. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{6-x}<0$

4.4.121. $\dfrac{4}{6-x}>\dfrac{6}{x}$

4.4.122. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x-4}<0$

4.4.123. $\dfrac{5}{x}<\dfrac{4}{9-x}$

4.4.124. $\dfrac{2}{10-x}-\dfrac{7}{x}>0$

4.4.125. $\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x-2}<0$

4.4.126. $\dfrac{4}{x-5}<-\dfrac{5}{x}$

4.4.127. $\dfrac{3x+2}{x^2+x+2}<-1$

4.4.128. $\dfrac{6}{x^2-x-6}<-1$

4.4.129. $\dfrac{x+5}{x^2-1}>1$

4.4.130. $\dfrac{3-9x}{x^2-1}>2$

4.4.131. $\frac{2x-7}{x^2+2x-8}>1$

4.4.132. $\frac{7x+1}{x^2+4x+3}>1$

4.4.133. $\frac{5x+1}{x^2-3x-4}<-1$

4.4.144. $\frac{5x^2-33x+42}{x^2-8x+15}\le\frac{4x}{x-3}$

4.4.134. $\frac{5x+3}{x^2+x-2}>1$

4.4.145. $\frac{x^2+13x+24}{2+x-x^2}\ge\frac{4}{2-x}$

4.4.135. $\frac{19x-2}{x^2+5x+4}>1$

4.4.146. $\frac{2x^2-7x+41}{x^2+7x+12}\le\frac{x+2}{x+4}$

4.4.136. $\frac{19x+53}{x^2-4x+3}<-1$

4.4.147. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$

4.4.137. $\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3}\le\frac{1}{x+1}$

4.4.148. $4-x>\frac{1}{x-1}$

4.4.138. $\frac{x^2-x+6}{x^2-3x+2}\ge\frac{2x}{x-2}$

4.4.149. $\frac{17}{x+4}<3-x$

4.4.139. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\frac{7}{x+1}\le 0$

4.4.150. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$

4.4.140. $\frac{x^2-7x-2}{x^2+3x+2}-\frac{2x-8}{x+2}\ge 0$

4.4.151. $\frac{1}{x+2}\le\frac{3}{x-3}$

4.4.141. $\frac{x^2+3x+54}{x^2-8x+15}+\frac{8}{x-5}\le 0$

4.4.152. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$

4.4.142. $\frac{x^2-5x+64}{x^2-11x+30}\le\frac{10}{5-x}$

4.4.153. $\frac{(x^2-5x+6)^2}{(x+1)(x-4)^3}<0$

4.4.143. $\frac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3}\ge\frac{3x-8}{x-3}$

4.4.154. $\frac{1}{3x-3-x^2}-\frac{3}{7x-3-3x^2}>0$

4.4.155. $4(x+1)^2-\frac{x+3}{2}>(2x-1)^2+3$

4.4.156. $4(\frac{x}{2}-6)^2-3x-5<3x-1+(x+2)^2$

4.4.157. $3+\frac{2x-9}{2}>\frac{15-3x}{6}-\frac{9-12x}{3}$

4.4.158. $\frac{(x-3)^2-x^2+6}{x^2+1}<0$

4.4.159. $\frac{x^4+1}{3x-5}>0$

4.4.160. $\frac{5x+2}{x-1}>1$

Найти область определения функций:

4.4.161. $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$

4.4.162. $y=\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$

4.4.163. $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$

4.4.164. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$

Найти область определения функций и указать наименьшее целое значение x для каждой из них:

4.4.165. $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

4.4.166. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

4.4.167. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

4.4.168. $y=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{x}{4}}+\sqrt{-x}$

4.4.169. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$

4.4.170.
$y=(\sqrt[6]{x+7}-3)(\sqrt{3-x}+7)$

4.4.171. $y=\frac{1}{x+2}+\sqrt{x+2}$

4.4.172. $y=\sqrt{\frac{3-2x-x^2}{9+x^2}}$

4.5 Решение систем рациональных неравенств

Решением системы неравенств называется любое число, которое при подстановке вместе неизвестных в каждое из неравенств системы, обращает их в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – значит найти множество всех решений системы.

Пример 1. *Решить систему неравенств:*

$$\begin{cases}(x-4)(x+4)\le 0\\ \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\end{cases}$$

Решение. Решаем методом интервалов первое неравенство. На координатной прямой отметим точки -4 и 4, в которых множители равны 0 и включим их в ответ, так как неравенство нестрогое (рис. 6). Тогда первое неравенство имеет решение: $x \in [-4;4]$.

Решим методом интервалов и второе неравенство. Из рис. 6 видно, что второе неравенство имеет решение: $x \in (-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$

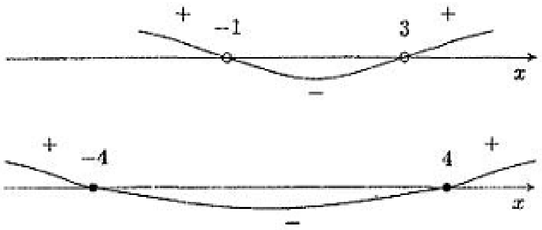


Рис.6.

Найдем пересечение этих множеств (рис.7):

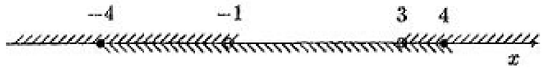


Рис.7.

Это пересечение дает искомые значения *x*, которые удовлетворяют нашему неравенству.

Ответ: $x \in [-4;-1) \cup (3;4]$

Пример 2. *Решить систему неравенств:*

$$\begin{cases} 1{,}4x < 8{,}4 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 11x + 24 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Решением 1-го неравенства служит множество $(-\infty;6)$, 2-го множество (2;7) и третьего - множество $(-\infty;3] \cup [8;\infty)$.

Пересечением указанных множеств является промежуток (2;3], который и есть множество решений системы неравенств.

Ответ: $x \in (2;3]$

Решить системы неравенств:

4.5.1. $5x - 20 \le x^2 \le 8x$

4.5.2. $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2$

4.5.3. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56$

4.5.4. $\dfrac{5x - 7}{x - 5} < 4 - \dfrac{x}{5 - x} + \dfrac{3x}{x^2 - 25} < 4$

4.5.5. $\begin{cases} x+12>-0{,}75 \\ \dfrac{1{,}5x+2}{4}<\dfrac{2x+3}{2} \end{cases}$

4.5.6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}<\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>5-\dfrac{x-2}{4} \end{cases}$

4.5.7. $\begin{cases} 3x-1<x+8 \\ 5x+12>6x+10 \end{cases}$

4.5.8. $\begin{cases} 3x+8>2x+7 \\ \dfrac{x}{2}+1<x-0{,}5 \end{cases}$

4.5.9. $\begin{cases} 3x+1>x+11 \\ 5x+8<4x+12 \end{cases}$

4.5.10. $\begin{cases} 2x>4x+10 \\ 3x+7>2x+8 \end{cases}$

Решить системы неравенств и указать наименьшее целое решение для каждой из них:

4.5.11. $\begin{cases} x+3>0 \\ 2x<3 \end{cases}$

4.5.12. $\begin{cases} x-4>5-2x \\ 3-2x<7+x \end{cases}$

4.5.13. $\begin{cases} 2x-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{2}{3} \\ 10x-2>1+4x \end{cases}$

4.5.14. $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1<2(x+4) \\ 12-11x<11x+10 \end{cases}$

4.5.15. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-2}\le 0 \\ x(x-5)<0 \end{cases}$

4.5.16. $\begin{cases} x^2>16 \\ x^2-16x\le 0 \end{cases}$

4.5.17. $\begin{cases} 2x^2+9x\le -7 \\ 2x+5\le 0 \end{cases}$

4.5.18. $\begin{cases} 2x^2-5x-7\ge 0 \\ x\ge 3 \end{cases}$

4.5.19. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x^2+4x<0 \end{cases}$

4.5.20. $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1)>x \\ (5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6 \end{cases}$

4.5.21. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+10}\geq 0 \\ x-6\geq 0 \end{cases}$

4.5.22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x}>-3 \\ x<4 \end{cases}$

Решить двойные неравенства и указать наибольшее целое решение для каждого из них:

4.5.23. $2<3x-5<4$

4.5.24. $-2\leq 4-2x\leq 2$

4.5.25. $x<3-x\leq 11$

4.5.26. $6<x^2+x<2$

4.5.27. $0<\dfrac{x-3}{x+5}<\dfrac{1}{2}$

4.5.28. $-1\leq x^2+x<12$

4.5.29. $1<\dfrac{1+x}{1-x}\leq 2$

4.5.30. $0<x^2+6x\leq 7$

4.5.31. $x\leq x^2+20\leq 9x$

Найти наименьшие целые решения системы неравенств:

4.5.32. $\begin{cases} 3x-4<8x+6 \\ 2x-1>5x-4 \\ 11x-9<15x+3 \end{cases}$

4.5.33. $\begin{cases} x^2+x-6\leq 0 \\ (x+1)(x-5)<0 \\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{4} \end{cases}$

4.5.34. $\dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-4$

4.5.35. $\begin{cases} 6x^2-29x+30\leq 0 \\ 5x+2>3x^2 \end{cases}$

4.5.36. $\begin{cases} 0{,}4x+\dfrac{7}{3}<\dfrac{2}{3}x-1{,}2 \\ 5x+17>9x-63 \end{cases}$

4.5.37. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3}\geq 0 \\ \dfrac{1}{x}\leq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

4.5.38. При каких значениях p оба корня квадратного трехчлена $x^2+2(p+1)x+9p-5$ отрицательны?

4.5.39. При каких значениях n оба корня уравнения $(n-2)x^2-2nx+n+3=0$ положительны?

4.5.40. При каких значениях a уравнение $x^2-(2a-6)x+3a+9=0$ имеет два различных корня?

4.5.41. При каких значениях a уравнение $(3a-5)x^2-(6a-2)x+3a-2=0$ не имеет решений?

Решить неравенства, используя замену переменных:

4.5.43. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$

4.5.44. $(x^2-3x-2)(x^2-3x+1)<10$

4.5.45. $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)<35$

4.5.46. $(x^2-2x+1)(x^2-2x+3)<3$

4.5.47. $(x^2-x)(x^2-x-2)<120$

4.5.48. $(x^2+x-2)(x^2+x)<24$

4.5.49. $(x^2+2x)(x^2+2x-3)<40$

4.5.50. $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)<105$

4.5.51. $(x^2-3x)(x^2-3x+2)<24$

4.5.52. $(x^2+3x+2)(x^2+3x+4)<48$

4.5.53. $(x^2-2x)(x^2-2x+5)<24$

4.6 Неравенства, содержащие модуль

Модулем числа x называется число $|x|=\begin{cases} x, x\ge 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$.

На основе этого определения неравенство $|x|\le a$, где $a\ge 0$, равносильно двойному неравенству $-a\le x\le a$ или системе $\begin{cases} x\ge -a \\ x\le a \end{cases}$.

Неравенство $|x|\ge a$ равносильно совокупности неравенств $\left\{\begin{array}{l} x\ge a \\ x\le -a \end{array}\right.$.

Аналогично можно решить неравенства $|f(x)|\ge a$ и $|f(x)|\le a$.

Пример 1. *Решить неравенство:* $2|x+1|>x+4$

Решение.

$$2|x+1|>x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2>x+4 \\ 2x+2<-x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<-2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

Решить неравенства:

4.6.1. $|x-3|<1$

4.6.2. $|4x-2|>7$

4.6.3. $|x^2-5x|<6$

4.6.4. $|2x^2-9x+15| \geq 20$

4.6.5. $\left|\dfrac{x+3}{x-27}\right|<1$

Неравенства, содержащие несколько модулей, т.е. неравенства вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+...+|f_n(x)| \geq f(x)$ решаются путем раскрытия модулей $|f_i(x)|$ $(i=1,..,n)$ по правилу:

$$\begin{cases} f_i(x), f_i(x) \geq 0 \\ -f_i(x), f_i(x)<0 \end{cases}$$

Для этого находят нули функций, стоящих под модулем, затем определяют интервалы знакопостоянства этих функций, раскрывают модули на каждом из этих интервалов и решают полученное неравенство.

Пример 2. *Решить неравенство:* $|2x-1|+|x+2| \geq 3$

Решение:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ (2x-1)+(x+2) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<0 \\ x+2 \geq 0 \\ -(2x-1)+(x+2) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+2<0 \\ (2x-1)-(x+2) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<0 \\ x+2<0 \\ -(2x-1)-(x+2) \geq 3 \end{cases}$$

Решение первой системы неравенств дает результат: $x \in [2/3;+\infty)$, второй: $x \in (-\infty;0]$, третьей: $x \in [6;+\infty)$ и четвертой: $x \in (-\infty;-4/3]$.

Объединяя результаты получим: $x \in (-\infty;0] \cup [2/3;\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;0] \cup [2/3;\infty)$

Решить неравенства:

4.6.6. $2|x+1|>x+4$

4.6.7. $|x-3| \geq |8-x|$

4.6.8. $|x-1|+|2-x|>3+x$

4.6.9. $|x^2-1|+x<5$

4.6.10. $|x^2-2x|<x$

4.6.11. $|2-5x|+|x+1|\geq x+3$

4.6.12. $|x^2+4x+3|>x+3$

4.6.13. $3|x-1|+x^2-7>0$

4.6.14. $(|x-1|-3)(x-3)<0$

4.6.15. $\dfrac{|x-2|}{3x+5}<7$

4.6.16. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$

4.6.17. $\dfrac{x\cdot|x|+1}{x-2}+\dfrac{x-1}{x+1}+1\geq x$

4.7. Задания для подготовки к ЕГЭ

4.7.1. *Определить число целых решений неравенства* $\dfrac{3x+3}{2-x}\geq 0$

1) 1; 2) 2; 3)3; 4) 4

4.7.2. *Определить число целых решений неравенства* $\dfrac{x+3}{9-2x}\geq 0$

1) 5; 2) 6; 3)7; 4) 8

4.7.3. *Какой промежуток включает в себя все решения неравенства* $\dfrac{x+2}{7-x}\geq 0$

1) $(-\infty,-6)$; 2) $[-3,-7]$; 3) $(-1,8)$; 4) $[0,+\infty)$

4.7.4. *Решить неравенство:* 7x+2,3 $\leq$ 149

1) $(-\infty;0,3]$; *2)* $(-\infty;-4,3]$; *3)* $[-4,3;+\infty)$; *4)* $[0,3;+\infty)$

4.7.5. *Решить неравенство:* (x−1)(4x+2)x+3 $\geq$ 0.

1) $(-\infty;3)\cup[-12;1]$; 2) $(-3;+\infty)$; 3) $(-3;-12])\cup[1;+\infty)$; 4) $[1;+\infty)$

Глава 5

Тригонометрия

5.1. Теоретические сведения

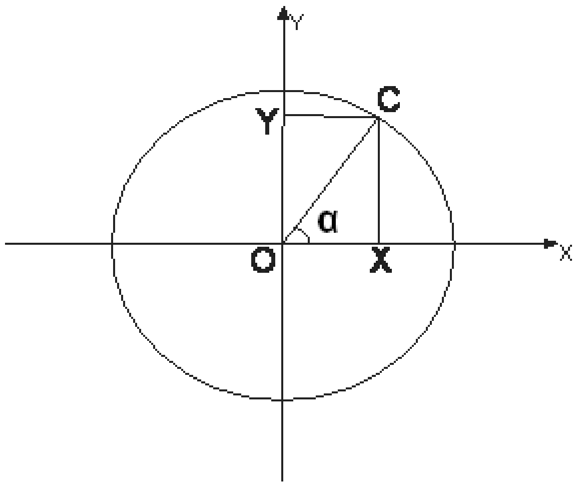
Рассмотрим единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$. Произвольной точке C с координатами (X, Y) на окружности соответствует семейство чисел $\alpha + 2\pi n, n \in Z$ – градусных мер углов, образуемых радиус-вектором $\overrightarrow{OC}$ с положительным направлением оси OX.

$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

$tg\alpha = \frac{Y}{X},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$

$ctg\alpha = \frac{X}{Y},\ \alpha \neq \pi n, n \in Z$



Как легко и просто заполнить таблицу значений элементарных тригонометрических функций?

1) Рисуем сетку таблицы из трех столбцов (см. табл. 1). Заполняем «шапку»: заголовок первого столбца x, второго – $\sin x$, третьего – $\cos x$. Заполняем первый столбец последовательно сверху вниз: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
2) В каждой из оставшихся клеток таблицы рисуем дробную черту, затем в числителе значок корня, а в знаменателе двойку.
3) Во втором столбце двигаясь последовательно от клетки к клетке сверху вниз, расставляя под знаком корня цифры 0, 1, 2, 3, 4.
4) В третьем столбце двигаясь снизу вверх, расставляем под знаком корня цифры 0, 1, 2, 3, 4.

Упростив выражения и воспользовавшись определениями тангенса и котангенса, получим таблицу 2.

Таблица 1.

x	sinx	cosx
0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Таблица 2.

x	sinx	cosx	tgx	Ctgx
0	0	1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0

Нам также понадобятся приведённые ниже формулы. Некоторые из них тривиальны, некоторые сложнее. В любом случае, за дополнительным теоретическим материалом можно обращаться к школьному учебнику.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$$

$$\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1, x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in Z$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in Z$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1-2\sin^2 x$$
$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, n, k\in Z$$
$$\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x}, x\neq\frac{\pi}{2}n, n\in Z$$
$$\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x$$
$$\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}, x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$$
$$\operatorname{ctg}3x=\frac{\operatorname{ctg}^3 x-3\operatorname{ctg}x}{3\operatorname{ctg}^2 x-1}, x\neq\frac{\pi}{3}n, n\in Z$$

Формулы половинного аргумента или формулы понижения степени

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}, x, y \neq \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}y = \frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}, x, y \neq \pi n, n \in Z$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Другие формулы

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, x \neq \pi(2n+1), n \in Z$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, x \neq \pi(2n+1), n \in Z$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, x \neq 2\pi n, k, n \in Z$$

$$\mathrm{ctg}x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}, x \neq \pi n, n \in Z$$

Формулы приведения
(легко определяются из тригонометрической окружности).

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$
sin α	cos α	cos α	sin α	-sin α	- cos α	-cos α	- sin α
cos α	sin α	-sin α	-cos α	- cos α	- sin α	sin α	cos α
tg α	ctg α	-ctg α	- tg α	tg α	ctg α	- ctg α	-tg α
ctg α	tg α	- tg α	-ctg α	ctg α	tg α	- tg α	-ctg α

5.2. Тригонометрические выражения

Пример 1. *Вычислить* $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha+\cos\alpha}$, если tg α=3.

Решение. Поскольку tgα=3, $\cos\alpha\neq 0$ – значит на *cos*α можно разделить числитель и знаменатель.

$$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2}{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+2}{3\mathrm{tg}\alpha+1}=\frac{3+2}{9+1}=0.5$$

Ответ: 0,5.

Пример 2. *Упростить выражение* $\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$.

Решение.

$$\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}=$$

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$$

Так как знаменатели в формулах должны быть отличны от нуля, то $\sin 2\alpha\neq 0$ и $\cos\alpha\neq 0$, а значит $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Ответ: $tg^2\alpha$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Пример 3. *Доказать тождество*: $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$.

Решение.

$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x =$
$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) +$
$+3\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x =$
$\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x =$
$\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1,$ что и требовалось доказать.

Упростить:

5.2.1. $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha}$

5.2.2. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$

5.2.3. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(45^0 - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^0 - \alpha)}$

5.2.4. $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$

5.2.5. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$

5.2.6. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$

5.2.7. $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha$

5.2.8. $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$

5.2.9. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$

5.2.10. $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}\left(1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

5.2.11. $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

5.2.12. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1}$

5.2.13. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

5.2.14. $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$

5.2.15. $\cos^2 \alpha + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

5.2.16. $\dfrac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 \alpha}} - 2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{tg}\alpha, \alpha \in \mathrm{II}$

5.2.17. $(\cos \alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin \alpha + \sin 2\beta)^2$

5.2.18. $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}$

5.2.19. $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{ctg}^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}$

5.2.20. $\dfrac{(1+\mathrm{tg}\alpha)\cos \alpha}{2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

5.2.21. $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

5.2.22. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)} - 2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

5.2.23. $1+\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

5.2.24. $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)} + \dfrac{\cos(3\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

5.2.25. $$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha+\pi)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}$$

5.2.26. $$\frac{\cos\frac{8\alpha}{5}-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\pi-\frac{31\alpha}{20}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{20}}$$

5.2.27. $$\frac{1-\cos(2\alpha+\pi)+\sin 2\alpha}{1-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin 2\alpha}$$

5.2.28. $$\frac{\sin^3(8\pi+\alpha)+\cos^3(\alpha-31\pi)}{\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)}+\sin\alpha\cos(\alpha-2\pi)-1$$

Доказать тождества:

5.2.29. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$

5.2.30. $$\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=-1$$

5.2.31. $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

5.2.32. $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$

5.2.33. $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^0+\alpha)$$

5.2.34. $$\frac{1-2\cos^2\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi}=\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi$$

5.2.35. $$\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha$$

Вычислить:

5.2.36. $\sin 930^0$

5.2.37. $\mathrm{ctg}\dfrac{31\pi}{6}$

5.2.38. $\dfrac{10}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}135^0 \sin 210^0 \cos 225^0$

5.2.39. $\mathrm{tg}(-750^0)\mathrm{ctg}\dfrac{31\pi}{6}$

5.2.40. $\sin 75^0 \sin 15^0$

5.2.41. $\dfrac{\cos 70^0 \cos 10^0 + \cos 80^0 \cos 20^0}{\cos 68^0 \cos 8^0 + \cos 82^0 \cos 22^0}$

5.2.42. $\dfrac{\cos^2 37^0 - \sin^2 23^0}{\cos 14^0}$

5.2.43. $\sin^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{4}$

5.2.44. $\mathrm{tg}\alpha$, если $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$

5.2.45. $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin(\alpha) = 0.8, \alpha \in \mathrm{I}$

5.2.46. $\dfrac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

5.2.47. $\dfrac{\sin\alpha}{2 - 5\cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$

5.2.48. $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}, \alpha \in \mathrm{I}\mathbf{V}$.

5.2.49. $|\mathrm{tg}\alpha|$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

5.2.50. $\dfrac{\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha = 3$

5.2.51. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

5.2.52. $\sin(2\alpha + 3\pi)$, если $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$

5.2.53. $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\cos(4\pi-4\alpha)=-\frac{1}{3}$

5.2.54. $\left|\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right|$,если $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0.4, \alpha\in I$

5.2.55. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$,если $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

5.3. Тригонометрические уравнения.

Уравнение $\sin x=a$ имеет решение только при $|a|\le 1$. В этом случае

$$\sin x = a; x=(-1)^n \arcsin a+\pi n, n\in Z$$

$$\arcsin a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

При этом следует помнить, что $\arcsin(-a)=-\arcsin a$.

В частных случаях формулы для решения принимают более простой вид:

$$\sin x=0; x=\pi n, n\in Z$$

$$\sin x=1; x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$\sin x=-1; x=\frac{-\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

Пример 1. *Решить уравнение*: $\sin x=-\frac{1}{2}$

Решение.

$$x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n=-(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Уравнение $\cos x=a$ имеет решение только при $|a|\le 1$. В этом случае

$\cos x = a; x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$\arccos a \in [0, \pi]$

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

При этом следует помнить, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

В частных случаях формулы для решения принимают более простой вид:

$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Пример 2. *Решить уравнение*: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение.

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

При любом a уравнение $tgx = a$ имеет бесконечное множество решений, определяемое формулой:

$x = arctga + \pi n, n \in Z$

$arctga \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctga	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

При этом следует помнить, что $arctg(-a) = -arctga$.

Пример 3. *Решить уравнение*: $tgx = -\sqrt{3}$

Решение. $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n = -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

При любом a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет бесконечное множество решений, определяемое формулой:

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{arcctg} a \in (0, \pi)$

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctga	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

При этом следует помнить, что $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Пример 4. *Решить уравнение*: $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение.

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n = \pi - \operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Пример 5. *Решить уравнение*: $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

Решение.

$\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

$2\cos 6x \cos 3x - 2\cos 4x \cos 3x = 0$

$\cos 3x(\cos 6x - \cos 4x) = 0$

$-2\cos 3x \sin 5x \sin x = 0$

$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$

$\sin 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \pi m \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5}m, m \in Z$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in Z$

Объединяя множества решений, получаем окончательный ответ:

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \frac{\pi m}{5}; m, n \in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, \frac{\pi m}{5}; m,n\in Z$

Пример 6. *Решить уравнение*: $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$

Решение. Делим обе части уравнения на число 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x+\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$.

Пример 7. *Решить уравнение*: $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

Решение. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$$4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$$

Убедившись, что $\cos x\neq 0$, поделим на эту величину обе части уравнения:

$$4\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}x-3=0$$

$$\mathrm{tg}x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$\mathrm{tg}x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+\pi m, m\in Z$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=arctg\frac{3}{4}+\pi m, m\in Z$.

Решить простейшие уравнения:

5.3.1. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.3.2. $\mathrm{tg}x=-1$

5.3.3. $\mathrm{tg}x=2$

5.3.4. $\sin x=2$

5.3.5. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ **5.3.6.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$

5.3.7. а) $\sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\frac{\cos x}{1+\sin x} = 0$

5.3.8. а) $5\sin^2 x + 5\cos^2 x = 5\mathrm{tg}x\mathrm{ctg}x$,

б) $(5\sin^2 x + 5\cos^2 x) = 20\mathrm{tg}x\mathrm{ctg}x$.

Разложить на множители методом группировки:

5.3.9. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$

5.3.10. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

5.3.11. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$

5.3.12. $(\sin 2t - \sin^{-1} 2t)^2 + (\cos^{-1} 2t - \cos 2t)^2 = 1$

5.3.13. $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$

5.3.14. $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos x - \sin x$

5.3.15. * $\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2+\sin x} = \frac{1}{3}\cos x$

5.3.16. * $\cos^6 x - \sin^6 x = 2\cos^2 2x$

5.3.17. * $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{1}{2}\text{ños}^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$

Применить формулы преобразования произведения в сумму и суммы в произведение:

5.3.18. $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x$

5.3.19. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$

5.3.20. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

5.3.21. $\sin x - \sin 3x = \sin 4x - \sin 2x$

5.3.22. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$

5.3.23. $\sin\left(x + 45^0\right)\sin\left(x - 15^0\right) = \frac{1}{2}$

5.3.24. $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$

5.3.25. $\sin 3x \cos x = \sin 5x \cos 3x$

5.3.26. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0$

5.3.27. $\sin 2x\cos 5x-\sin 3x\cos 4x=0$

Решить уравнения, сводимые к квадратным и простейшим кубическим:

5.3.28. $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

5.3.29. $6\cos^2 x-5\sin x+5=0$

5.3.30. $4(\cos^2 x+\cos 2x)+3\sin(270^0+x)=2$

5.3.31. $3\sin^2 x-3\cos 2x-12\sin x+7=0$

5.3.32. $2\sin(2x+1.5\pi)-11\sin x=1$

5.3.33. $1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos(21\pi-x)$

5.3.34. $\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x-3=0$

5.3.35. $8\cos^4 x=11\cos 2x-1$

5.3.36. $\sin^3 x=2\sin 2x$

5.3.37. $2\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)\sin 5x+1=\cos 10x$

5.3.38. $\frac{2-3\sin x+\cos(2x+\pi)}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0$

5.3.39. $2\cos^2 x-7\cos x=2\sin^2 x$

5.3.40. $6\sin^2(\pi-x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+7\cos^2(\pi-x)=6$

Решить однородные уравнения:

5.3.41. $10\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=3$

5.3.42. $1+7\cos^2 x=3\sin 2x$

5.3.43. $\sin^2 2x+4\cos^2 2x-4\sin 4x=1$

5.3.44. $2\sin x\cos\left(x+\frac{11\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)\cos x=3\cos x\sin(7\pi-x)$

5.3.45. $\sqrt{3}\sin^2(\pi+x)-(1+\sqrt{3})\cos x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos^2 x=0$

5.3.46. $\dfrac{1}{\cos x}+\sin x=7\cos x$

Решить уравнения со скрытыми выражениями $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$:

5.3.47. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2=0$

5.3.48. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=\dfrac{1}{2}$

5.3.49. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$

5.3.50. $\sin x+\cos x=\sin 2x+\cos 2x$

5.3.51. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$

5.3.52. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2-5=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Решить уравнения на применение формул понижения порядка:

5.3.53. $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$

5.3.54. $\cos^2 4x+\sin^2 3x=1$

5.3.55. $\sin^2 3x+\sin^2(81\pi-x)=\dfrac{3}{2}-\sin^2 2x$

5.3.56. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$

5.3.57. $\cos^2(45^0+x)=\cos^2(45^0-x)+5\cos x$

5.3.58. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

Решить уравнения на применение формул двойного аргумента:

5.3.59. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$

5.3.60. $\cos 2x\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$

5.3.61. $\sin 4x=2\cos^2 x-1$

5.3.62. $2\cos^2 x-\sin 2x+4\sin^2 x=2$

5.3.63. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\dfrac{1}{16}$

Решить уравнения:

5.3.64. $2\sin^2 x + tg^2 x = 2$

5.3.65. $ctgx - tgx = 1.5$

5.3.66. $\dfrac{1 - tg\frac{x}{2}}{1 - ctg\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}$

5.3.67. $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 2\sin 2x = ctgx + tgx$

5.4. Задания для подготовки к ЕГЭ

Задания с выбором ответа (уровень части А)

5.4.1. Упростить выражение $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6$

1) 1 2) - 5 3) 3 4) - 3

5.4.2. Упростить выражение $6 - 6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$.

1)1 2)$12\cos^2\alpha$ 3)$6 + 6\cos\alpha$ 4)-1

5.4.3. Найти значение выражения $2\sin^2\alpha + 4 - 3\cos^2\alpha$, если $4\sin^2\alpha = 1$.

1)1 2)3 3)2,25 4)4

5.4.4. Упростить выражение $\sin\alpha\sin 2\alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos\alpha\cos 2\alpha$

1) 0 2) 2cosα 3) cosα + sinα 4) cosα – sinα

5.4.5. Найти $tg 2\alpha$, если $tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1)0 2)не существует 3) – 0,75 4)0,75

5.4.6. Найти tg α, если cos $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

1) 0,5 2) 2 3) -0,5 4) - 2

5.4.7. Найти сумму целых значений функции $y = 3 - 2\sin x$.

1) 0 2) 3 3) 6 4) 15

5.4.8. Найти множество значений функции $y = \sin^2 x - 4$.

1)$[-5;-3]$ 2)$[-4;+\infty)$ 3)$[-4;4]$ 4)$[-4;-3]$

5.4.9. Указать наибольшее значение функции $y = 1 - \cos 3x$.

1) 1 2) 2 3)0 4)4

5.4.10. Найти множество значений функции $y = \sin x + 2$.

1) [- 1; 1] 2) [0; 2] 3) [1; 3] 4) [2; 3]

5.4.11. Решить уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

1) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 2) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 3) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 4) $\varnothing$

5.4.12. Решить уравнение $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi\pi, n \in Z$ 2) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

3) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ 4) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi\pi, n \in Z$

5.4.13. Решить уравнение $\frac{1}{\cos 3x} + 2 = 0$.

1) $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$ 2) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ 4) $\pm \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$

5.4.14. Найти корень уравнения sin2x-4cosx=0, принадлежащий отрезку [2;3].

1) $\frac{7\pi}{3}$ 2) $\frac{5\pi}{2}$ 3) $\frac{9\pi}{4}$ 4) $\varnothing$

Задания с кратким и полным ответом (уровень части В, С)

5.4.15. Найти значение выражения $\sqrt{6}(\sin^2 x - \cos^2 x)$, если $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$.

5.4.16. Найти значение выражения $\cos 15°(\cos 50° \sin 65° - \cos 65° \sin 50°)$.

5.4.17. Найти значение выражения $\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2\cos(\pi - \alpha)}$, *если* $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

5.4.18. Пусть x_0 – наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 2 = 0$. Найти $tg\, x_0$.

5.4.19. Сколько решений имеет уравнение $(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1 - x^2} = 0$?

5.4.20. Найти значение выражения $2\sqrt{5}ctg(\arcsin\frac{2}{3})$.

5.4.21. Решить уравнение $4\cos x \operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0$.

5.4.22. Решить уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$.

5.4.23. Найти сумму целых значений функции $y = 3\sqrt{36\cos^2 x - 12\sin x + 27}$.

5.4.24. Решить уравнение $\frac{ctgx \cdot \sin 2x - |\cos 2x|}{\sin 3x} = 1$.

5.4.25. Найти значение выражения
$9\sin 29^0 \sin 225^0 (\sin^2 8^0 - \cos^2 8^0) + 18\sin 61^0 \cos 45^0 \sin 8^0 \cos 8^0$.

5.4. 26. Решить уравнение $\sin x + \cos x = -1$.

5.4.27. Решить уравнение $\sin(3\pi 2^x) = \cos(\pi 2^x) - \sin(\pi 2^x)$.

5.4.28. Решить уравнение $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$.

5.4.29. Решить уравнение $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x$.

5.4.30. Решить уравнение $\underbrace{|\sin(\sin(\ldots\sin x)\ldots)|}_{100ðàç} + \sin^2 x = \cos(tgx) - \cos^2 x$.

Глава 6

Логарифмические и показательные уравнения, системы уравнений и неравенства

6.1. Тождественные преобразования логарифмических и показательных выражений

Логарифмом числа по b основанию a называется такое число, обозначаемое $\log_a b$, что $a^{\log_a b} = b$, где *a* – основание логарифма (*a > 0, a* $\neq$ *1*), *b* – логарифмическое число (*b > 0*)

Десятичный логарифм: $\lg b = \log_{10} b$

Натуральный логарифм: $\ln b = \log_e b$

где *e = 2,71828*

Свойства логарифма

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
4. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
5. $a^{\log_a b} = b$
6. $\log_a a = 1$
7. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
8. $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m} \log_a b$
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
10. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Найти значение выражений:

6.1.1. $\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \dfrac{9}{2}$

6.1.2. $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$

6.1.3. $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_4 36 + \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{25}{81}$

6.1.4. $\log_2 \dfrac{1}{8}$

6.1.5. $\log_2 32$

6.1.6. $\lg 1000$

6.1.7. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7}$

6.1.8. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$

6.1.9. $\lg 1$

6.1.10. $\log_{49} 7$

6.1.11. $3^{\log_3 7}$

6.1.12. $\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$

6.1.13. $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

6.1.14. $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

6.1.15. $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$

6.1.16. $9^{3-\log_3 54} + 7^{-\log_7 2}$

6.1.17. $10^{3-\lg 4} - 49^{\log_7 15}$

6.1.18. $3^{1-\log_9 49} + \sqrt{5}^{2\log_5 8+2} - (2,4)^{\log_{2,4} 10+1}$

6.1.19. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$

6.1.20. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$

6.1.21. $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$

6.1.22. $\dfrac{2\log_3 4 + \log_3 2}{\log_3 2}$

6.1.23. Вычислить $\log_{(a^4 \cdot \sqrt[5]{b^6})} \left(\dfrac{c \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}}\right)$, если $\log_d c = \sqrt{5}$.

Дополнительные задачи:

6.1.24. $0,25\left(1 + 4^{\log_2 5}\right)^{\log_{26} 4}$

6.1.25. $\dfrac{2\log_3 12 - 4\log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4\log_3 2}{3\log_3 12 + 6\log_3 2}$

6.1.26. $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\cdot(\log_3 18)}{2\log_3 2 + \log_3 18}$**.**

6.1.27. Вычислить $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \dfrac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a}$, если $\log_a b=14$.

6.1.28. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{a}} \dfrac{b}{a} + \log_{\sqrt{b}} a\sqrt[3]{b}$, если $\log_a b=9$.

6.1.29. $3\log_{\sqrt[3]{ab}} \dfrac{\sqrt{b}}{a} + 2\log_{\sqrt[3]{ab}} a^3$, если известно, что $\log_a b=2$.

6.1.30. $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2$

6.1.31. $(\log_2 5 + 16\log_5 2 + 8)(\log_2 5 - 4\log_{80} 5)\log_5 2 - \log_2 5$

6.2. Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b\ (\text{ãäå } a > 0, a \neq 1)$. Решением этого уравнения при допустимых значения x>0 является $x = a^b$.

Логарифмическое уравнение $\log_a x = b\ (\text{где } a > 0, a \neq 1)$, множество допустимых значений которого задается неравенством f(x)>0, эквивалентно уравнению $f(x) = a^b$.

Логарифмическое уравнение вида $\log_a x = \log_a \varphi(x)\ (\text{ãäå } a > 0, a \neq 1)$ имеет множество допустимых значений, задаваемое системой неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ и эквивалентно уравнению f(x)=φ(x).

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(x-5) = 3$.

Решение. ОДЗ: x-5>0, x>5.

$x-5=2^3$

$x=8+5$

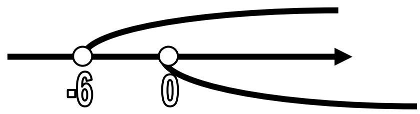
$x=13$

Ответ: x=13.

Пример 2. Решить уравнение: $\log_2 x + \log_2(x+6) = 4$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+6>0 \\ x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-6 \\ x>0 \end{cases}$



ОДЗ: $(0; +\infty)$.

$$\log_2(x\cdot(x+6)) = 4$$

$$x\cdot(x+6) = 2^4$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$D = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

$$x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8, \quad x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2.$$

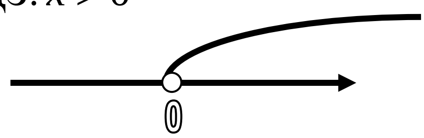
x_1 – посторонний корень, т.к. не входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

Пример 3. Решить уравнение: $\log^2{}_{16} x^2 - \log_{16} x^3 = \frac{1}{2}\log_{16} 256$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$



ОДЗ: $(0; +\infty)$.

$$4\log^2{}_{16} x - 3\log_{16} x = 1$$

Пусть $\log_{16} x = t$, тогда

$$4t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$t_1 = -\frac{1}{4}, \quad t_2 = 1.$$

Возвращаясь к замене получим

$$\log_{16} x = -\frac{1}{4} \qquad \log_{16} x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad x = 16$$

Оба решения удовлетворяют условиям ОДЗ.

Ответ: 0,5; 16.

Решить логарифмические уравнения, с помощью определения логарифма:

6.2.1. $\lg(x-5)^2 = 2$

6.2.2. $\log_{0,7}\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = 0$

6.2.3. $\log_3(x^2+4x+12) = 0$

6.2.4. $\log_6 x = 1 - \log_6 3$

6.2.5. $\log_3 x = 2 - \log_3 5$

6.2.6. $\log_x\left(\dfrac{1}{64}\right) = -3$

6.2.7. $\log_{x+1} 16 = 2$

6.2.8. $\log_5\big(2-\log_5(3-x)\big) = 0$

6.2.9. $\log_3\big(\log_5(x-4)\big) = 0$

6.2.10. $\log_4 \log_2 \log_3(2x-1) = 0{,}5$

6.2.11. $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = 0{,}5$

6.2.12. $\lg \log_2 \log_3(\sqrt{x}+1) = 0$

6.2.13. $\log_{1-x}(4x^2-9x+1) = 3$

6.2.14. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1) = 3$

6.2.15. $\log_4\big(40+8\log_3(x+4)\big) = 3$

6.2.16. $\log_4\big(2\log_3(1+\log_2\big(1+\log_2(1+\log_2 x)\big))\big) = \dfrac{1}{2}$

Уравнения первой и высших степеней относительно логарифма

6.2.17. $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$

6.2.18. $\lg(2-3x) + \lg(2+3x) = \lg(4-x) + \lg x$

6.2.19. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$

6.2.20. $\lg(2-x) + 2\lg\sqrt{1-x} = \lg 12$

6.2.21. $\lg(x+1) - \dfrac{1}{2}\lg(5x-1) = \dfrac{1}{2}\lg \tilde{o}$

6.2.22. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 1 = \log_{\frac{1}{2}}(3x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

6.2.23. $\log_2(x^2+8)-\log_2(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

6.2.24. $\log_2\left(2-\frac{x}{9}\right)-\log_2\left(2-\frac{\sqrt{x}}{3}\right)=\log_2\sqrt{2-\frac{x}{9}}-\frac{1}{2}$

6.2.25. $2\lg\sqrt{x^2-25}+\frac{1}{2}\lg(x^2+2x+1)=\lg(x+5)+\lg 7$

6.2.26. $10^{\lg(x-16)-1}=2$

6.2.27. $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5$

6.2.28. $\lg\left(169+x^3\right)-3\lg(x+1)=0$

6.2.29. $\log_2(x-4)^9-8\log_2((x-4)(x-35))+9\log_2(x-35)=5$

6.2.30. $\lg^2 x-\lg x-2=0$

6.2.31. $\log_2^2 x-\log_2\frac{16}{x}=2$

6.2.32. $\log_5^2 x-2\log_5 x=0$

6.2.33. $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$

6.2.34. Найти сумму корней уравнения $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.

6.2.35. Найти больший корень уравнения $\lg^2 x-\lg(10x)+\lg\frac{1}{x}=7$.

При решении уравнений второго и высших порядков необходимо обратить внимание на то, что

$$\lg^n \tilde{o}^k=k^n\lg^n x$$

6.2.36. $\lg^2\tilde{o}^3-10\lg\tilde{o}+1=0$

6.2.37. $\lg^2\tilde{o}^2-\lg\tilde{o}^3=\lg 10$

6.2.38. $\lg^2\tilde{o}^3+3\lg\tilde{o}^5=6$

6.2.39. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3^2 x-5\log_3\tilde{o}+10\right)=-2$

6.2.40. $\log_2^3\left(9x^2\right)=8\log_2 3\tilde{o}$

6.2.41. $4\log_4^2(-x)+2\log_4\tilde{o}^2+1=0$

6.2.42. $6\log_{\frac{1}{2}}(-x)-\log_{\frac{1}{2}}^2 x^2=2$

6.2.43. $\log_4^2 x^2+3=7\log_4(-\tilde{o})$

6.2.44. $\log_2^2 x+\log_2^2\frac{2}{x}=\log_2^2 2^{-1}$

6.2.45. $(\log_2 x-2)\log_2 x=2^{\log_2 3}$

6.2.46. $\log_3^2 x+\log_3 5\cdot\log_5 x=6$

6.2.47. $\lg^2 x+2\lg x-8=0$

6.2.48. $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$

6.2.49. $\left(4\lg^2 x-1\right)\left(\lg^2 x^2+1\right)=15$

6.2.50. $\dfrac{1}{3-\lg x}+\dfrac{2}{\lg x-1}=3$

6.2.51. $\dfrac{1}{5-\log_2 x}+\dfrac{2}{1+\log_2 x}=1$

Решить уравнения, содержащие неизвестное и в основании и в показателе степени:

6.2.52. $x^{\log_2 \tilde{o}+2}=8$

6.2.53. $x^{\log_3 \tilde{o}-4}=\dfrac{1}{27}$

6.2.54. $x^{\lg \tilde{o}}=100x$

6.2.55. $x^{3\lg \tilde{o}-\frac{1}{\lg \tilde{o}}}=\sqrt[3]{10}$

6.2.56. $x^{\lg \tilde{o}}=\dfrac{100}{x}$

6.2.57. $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10x$

6.2.58. $x^{3\log_x (1-x)^2}=64$

6.2.59. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$

6.2.60. $\log_4(x+2)\cdot\log_x 2=1$

6.2.61. $\log_9(2x+3)\log_x 3=1$

6.2.62. $\log_{2x}\dfrac{2}{x}+\log_2^2 x=1$

6.2.63. $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$

6.2.64. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$

6.2.65. $(1+\log_x \frac{4-x}{10})\lg x=\lg\lg 10^3-1$

6.2.66. $3\log_x 4+2\log_{4x} 4+3\log_{16x} 4=0$

6.2.67. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

6.2.68. $\log_2 x + 2\log_{16} x = 12$

6.2.69. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$

6.2.70. $\log_2^2 4x - 4\log_4 x = 12$

6.2.71. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

6.2.72. $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 2\log_2(x-1) = 0$

6.2.73. $2\log_3(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 0$

6.2.74. $4(1+2\log_2 x) = 3\log_2 x \cdot \log_x^2 4$

6.2.75. $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 4$

6.2.76. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$

6.2.77. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$

6.3. Показательные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное лишь в показателе степени, называется *показательным*. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^x = b$. Оно решается с помощью логарифмирования:

$$\log_a x = b \text{ (где } a > 0, a \neq 1\text{)}.$$

Во многих случаях решение показательных уравнений после надлежащих преобразований сводится к решению простейшего вида $a^x = b$. Кроме того, при решении показательных уравнений часто используется известное положение: если равны степени с одним и тем же основанием, то равны и показатели этих степеней.

Уравнение вида $a^{\tilde{o}} = a^n$.

6.3.1. $2^{\tilde{o}^2 - 6x - 2,5} = 16\sqrt{2}$

6.3.2. $2^{\tilde{o}} \cdot 5^x = 0,1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$

6.3.3. $5^{\tilde{o} - \sqrt{3x-5}} = 125$

6.3.4. $16^{2x-1}=\dfrac{1}{0.25^{3x+22}}$

6.3.5. $0.125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

6.3.6. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{2}{3}$

6.3.7. $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x+0.5}\cdot\left(\dfrac{125}{27}\right)^{x}=\dfrac{3\lg 8}{5\lg 32}$

6.3.8. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x}=\dfrac{8\lg 9}{15\lg 27}$

6.3.9. $\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}}=128\cdot\dfrac{1}{16}$

6.3.10. $81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}=1$

6.3.11. $\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt[x]{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{5}}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-4}$

6.3.12. $4^{\sqrt{x+1}}-64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=0$

6.3.13. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2+2x-1}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{4}$

6.3.14. $2^{x}\cdot 27^{5-x}=2^{3}\cdot 3^{6}$

При решении следующих заданий следует вынести за скобки общий множитель, содержащий переменную.

6.3.15. $2^{x+2}-2^{x}=96$

6.3.16. $3^{x+2}-3^{x+1}=18$

6.3.17. $5^{x+1}-5^{x-1}-5^{x}=95$

6.3.18. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$

6.3.19. $6^{x-2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$

6.3.20. $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=75$

6.3.21. $4\cdot 3^{2x}-2^{2x-1}-3^{2x+1}-4^{x}=0$

6.3.22. $6^{\tilde{o}}+6^{x+1}=2^{\tilde{o}}+2^{\tilde{o}+1}+2^{\tilde{o}+2}$

6.3.23. $4^{2x-2}-2^{4x-24}+16^{x-1}+256^{0,5x-3}=1024$

6.3.24. $5\cdot 2^{\sqrt{\tilde{o}}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}-1}=56$

6.3.25. $3^{2\tilde{o}+3}+\sqrt{9^{2x+1}}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-2\tilde{o}}=91$

6.3.26. $\sqrt{7^{2\tilde{o}+6}}-\sqrt{49^{x+2}}-2^{\tilde{o}+5}+2\cdot 0{,}25^{-(1+0{,}5\tilde{o})}=0$

При решении следует воспользоваться заменой $a^{\tilde{o}}=y$.

6.3.27. $3^{2\tilde{o}}-10\cdot 3^{x}+9=0$

6.3.28. $2\cdot 2^{\tilde{o}}+4^{x}=80$

6.3.29. $4^{4\tilde{o}-2}-4^{2x-1}=12$

6.3.30. $3^{\sqrt{\tilde{o}}}-3^{1-\sqrt{x}}=\dfrac{26}{3}$

6.3.31. $3\cdot\sqrt[\tilde{o}]{81}-10\cdot\sqrt[\tilde{o}]{9}+3=0$

6.3.32. $3^{2\tilde{o}}-10\cdot 3^{x}+9=0$

6.3.33. $4^{\sqrt{2\tilde{o}-1}}-3\cdot 2^{1+\sqrt{2x-1}}-2^{4}=0$

6.3.34. $2^{2\tilde{o}}+14\cdot 2^{x+1}-29=0$

6.3.35. $4^{\tilde{o}}+4=2^{x}\left(2^{\tilde{o}+1}-3\right)$

6.3.36. $8^{\frac{2}{\tilde{o}}}+2^{\frac{2\tilde{o}+3}{\tilde{o}}}-12=0$

6.3.37. $3\cdot 4^{\frac{\tilde{o}}{4}}-7\cdot 2^{\frac{\tilde{o}}{4}}=20$

Решить уравнения:

6.3.38. $3\cdot 16^{\tilde{o}}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{\tilde{o}}$

6.3.39. $10\cdot 81^{\tilde{o}}+9\cdot 225^{x}-9\cdot 625^{\tilde{o}}=0$

6.3.40. $4^{\tilde{o}}+3\cdot 6^{x}-4\cdot 9^{\tilde{o}}=0$

6.3.41. $9^{\tilde{o}}+6^{x}-2\cdot 2^{2\tilde{o}}=0$

6.3.42. $9^{\tilde{o}}+4^{x}=13\cdot 6^{\tilde{o}-1}$

6.3.43. $64^{\tilde{o}}=2\cdot 27^{x}-36^{\tilde{o}}$

6.3.44. $4^{\tilde{o}}+10^{x}-2\cdot 25^{\tilde{o}}=0$

6.3.45. $3\cdot 4^{\tilde{o}-1}-9\cdot 81^{x}=3\cdot 6^{\tilde{o}-2}$

6.3.46. $5^{2\tilde{o}-1}+2\cdot 15^{x-1}=3^{2\tilde{o}-1}$

6.3.47. $6^{-\tilde{o}}-2\cdot 3^{-x}+2^{1-\tilde{o}}=4$

Решить показательно-логарифмические уравнения:

6.3.48. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 \tilde{o}-2}=(2{,}5)^{2(1+\lg x)}$

6.3.49. $\sqrt{3}^{\lg \tilde{o}}=3^{\lg 2}\cdot 9^{\lg(\sqrt{x}-1)}$

6.3.50. $4^{\log_{64}(\tilde{o}-3)+\log_2 5}=50$

6.3.51. $\lg 9^{-1}+x\lg\sqrt[3]{3^{5x-7}}=0$

6.3.52. $\log_{\sqrt{5}}(125\cdot\sqrt[3]{5^{x^2-8x+15}})=8$

6.3.53. $\lg 2+(2x-1)\lg 2-\lg(3\cdot 2^{x+1}-8)=0$

6.3.54. $\log_3(3^x+1)-\log_3(1-3^{-2x})-2x=-\frac{1}{2}\log_3 64$

6.3.55. $2^{\log_5 \tilde{o}^2}-2^{1+\log_5 x}+2^{\log_5 x-1}-1=0$

6.3.56. $4^{\log_9 \tilde{o}^2}+6\cdot 4^{\log_9 x+\frac{1}{2}}=4^{\log_9 \tilde{o}+1}+2^{\log_{\sqrt{2}} 4}$

6.3.57. $4^{\log_9 \tilde{o}}+6\cdot 2^{\log_9 x}+8=0$

6.3.58. $5^{\lg \tilde{o}}-3^{\lg x-1}=3^{\lg \tilde{o}+1}-5^{\lg x-1}$

6.3.59. $7^{\lg \tilde{o}}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg \tilde{o}-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$

6.3.60. $4^{\log_{16} \tilde{o}}-3^{\log_{16} x-0{,}5}=3^{\log_{16} \tilde{o}+0{,}5}-2^{2\log_{16} x-1}$

6.4. Показательные и логарифмические неравенства

Прежде чем решать показательные и логарифмические неравенства, необходимо повторить свойства числовых неравенств, решение линейных неравенств, квадратичных неравенств и их систем.

Следует помнить:

1) если $a^{\varphi(x)}>a^{f(x)}$, то $\varphi(x)>f(x)$ при a>1 и $\varphi(x)<f(x)$ при 0<a<1;

2) если $\log_a \varphi(x)>\log_a f(x)$, то $\varphi(x)>f(x)$ при a>1 и $\varphi(x)<f(x)$ при 0<a<1.

Это следует из свойств монотонности показательной и логарифмической функций, которые возрастают при a>1 и убывают при 0<a<1.

Решить неравенства:

6.4.1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\tilde{o}^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$

6.4.2. $5^{\frac{x+2}{3-\tilde{o}}} > 25$

6.4.3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-1}{2\tilde{o}+1}} < \frac{9}{4}$

6.4.4. $(0{,}5)^{(\tilde{o}^2+x-2)(3-x)} > 1$

6.4.5. $0{,}125 \cdot 4^{2\tilde{o}-3} > \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

6.4.6. $25 \cdot (0.4)^{5-\tilde{o}} < 1{,}6 \cdot (0{,}4)^{x^2-3x+1}$

6.4.7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\tilde{o}-1\right|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+5}$

6.4.8. $3^{\frac{x+1}{\tilde{o}}} + 3^{\frac{1}{\tilde{o}}} \geq 12$

6.4.9. $2^{\frac{2}{\tilde{o}}} + 4^{\frac{1}{\tilde{o}}+2} \leq 68$

6.4.10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\tilde{o}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3$

6.4.11. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\tilde{o}} - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 16 > 0$

6.4.12. $4^{2\tilde{o}} + 4^{x} \leq 6$

6.4.13. $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

6.4.14. $\lg\left(\frac{4x-3}{x-1} + 1\right) > 0$

6.4.15. $\lg(x^2 + 2 + 2x) > 1$

6.4.16. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{6}{x}\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x+5)$

6.4.17. $\log_{0,8}(2x^2 + 2) > \log_{0,8}(7x - 1)$

6.4.18. $(5x-2)\log_{0,3}x<0$

6.4.19. $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)<1$

6.4.20. $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$

6.4.21. $\lg\dfrac{1}{x}\geq 1$

6.4.22. $\log_{0,3}\left(\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

6.4.23. $\log_{0,5}\left(\dfrac{x+3}{3-x}\right)^2>2$

6.4.24. $\log_5(x^2-2x+3)-\log_5(x+1)>0$

6.4.25. $\log_2(4^x-2^{x+1}+1)<2$

6.4.26. $2\log_3(x-5)-\log_3 4\leq -\log_3(3x-20)$

6.4.27. $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$

6.4.28. $\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg(x+2)$

6.4.29. $\log_2(2+x)-\log_2(3+x)>\log_2 x$

6.4.30. $\log^2_{\frac{1}{2}}x-\log_{\frac{1}{2}}x-2\leq 0$

6.4.31. $\log^2_4 x+\log_4\sqrt{x}>1{,}5$

6.4.32. $\log^2_2 x-\log_2 x^2>3+8\log_2 16$

6.4.33. $\log_2 x\cdot\log_2\dfrac{x}{16}+3<0$

6.4.34. $\log^2_3(x+1)-2\log_3(x+1)^2+\log_3 27<0$

6.4.35. $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>1+\lg x$

6.4.36. $\log_4(x+7)>-\log_{\frac{1}{4}}(3x+5)$

6.5. Показательные и логарифмические системы уравнений

Пример. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} y^{1-0.2\log_x y} = x^{\frac{4}{5}} \\ 2+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x^2}\right)=\log_x 4 \end{cases}$$

Решение:

$x \neq 0, x > 1$

По определению логарифма имеем:

$$\begin{cases} y>0 \\ 1-\dfrac{3y}{x^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ 1>\dfrac{3y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ \dfrac{3y}{x^2}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ 3y<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ y<\dfrac{x^2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0<y<\frac{x^2}{3}.$$

Прологарифмируем первое уравнение системы по основанию x.

$$\begin{cases} (1-0{,}2\log_x y)\log_x y = \dfrac{4}{5}\log_x x \\ \log_x x^2+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x^2}\right)=\log_x 4 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} \log_x y-0{,}2\log_x^2 y=0{,}8 \\ \log_x x^2\left(1-\dfrac{3y}{x^2}\right)=\log_x 4 \end{cases}\right|^{*(-5)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_x^2 y-5\log_x y=-4 \\ x^2-3y=4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы выразим y через x:

$3y=x^2-4$, $y=\dfrac{x^2-4}{3}$

Тогда: $\log_x^2\dfrac{x^2-4}{3}-5\log_x\dfrac{x^2-4}{3}+4=0$

Пусть $\log_x\dfrac{x^2-4}{3}=t$, $t^2-5t+4=0$, D = (-5)^2 -4·1·4 = 9, $t=\dfrac{5\pm 3}{2}$,

$t_1=1$ или $t_2=4$.

1) $\log_x \frac{x^2-4}{3} = 1$

$\frac{x^2-4}{3} = x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

D = (-3)^2 *– 4*1*(-4) = 25*

$x = \frac{3 \pm 5}{2}$

$x_1 = -1$ или $x_2 = 4$

$y_1 = -1$ или $y_2 = 4$

(-1,-1) – удовлетворяет *ОДЗ*

(4,4) решение системы уравнений.

Ответ: (4, 4).

2) $\log_x \frac{x^2-4}{3} = 4$

$\frac{x^2-4}{3} = x^4$

$3x^4 - x^2 + 4 = 0$

пусть $x^2 = a$, тогда

$3a^2 - a + 4 = 0$

D = (-1)^2 *– 4·3·4 = -47<0*

корней нет

Решить системы уравнений:

6.5.1. $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 3 \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y = 3 \end{cases}$

6.5.2. $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 80 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$

6.5.3. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases}$

6.5.4. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{9}}(x+y) = -2 \\ \log_5(x-y) = 2 \end{cases}$

6.5.5. $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ \log_2 xy = 8 \end{cases}$

6.5.6. $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y) \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1 \end{cases}$

6.5.7. $\begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ x-y=1 \end{cases}$

6.5.8. $\begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 5^y=11 \\ 5\cdot 4^x+4\cdot 5^y=24 \end{cases}$

6.5.9. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=12 \\ 2^y\cdot 3^x=18 \end{cases}$

6.5.10. $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725 \\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25 \end{cases}$

6.6. Задания для подготовки к ЕГЭ

6.6.1. Упростить выражение: $2\cdot\log_3 6-\log_3 4+5^{\log_5 2}$

1) 0; 2) 13; 3) 7; 4) 4

6.6.2. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения: $\log_8(3+x)=0$

1) (3;5); 2) (-4;-2); 3) (-3; -1); 4) (2;4)

6.6.3. Найти область определения функции: $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x}-\frac{1}{27}}$

1) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 4) $[2;+\infty)$

6.6.4. Найти наименьший корень уравнения: $3\cdot 9^x-5\cdot 6^x+2\cdot 4^x=0$

6.6.5. Найти произведение корней уравнения: $7^{2\cdot(\log_3 x)^2}-8\cdot 7^{(\log_3 x)^2}+7=0$

6.6.6. Найти сумму квадратов корней уравнения: $4^{x^2}+2^{x^2}-6+0$

6.6.7. Решить уравнение: $3\cdot\log_4\left(2+\frac{30}{2x-11}\right)=2\cdot\log_4\left(2-\frac{15}{x+2}\right)+8$

6.6.8. Решить неравенство: $\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1\langle 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x$

Глава 7

Прогрессии

7.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с некоторым числом d.

Иными словами, арифметическая прогрессия – это последовательность (a_n), заданная рекуррентно,

$$a_1, \quad a_{n+1} = a_n + d,$$

где a_1, a_n, a_{n+1} соответственно первый, n и $n+1$-й члены прогрессии, d – разность арифметической прогрессии.

Например, 1, 3, 5, 7, 9, … $(a_1 = 1, d = 2)$

При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, $d < 0$ – убывает.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Формулы суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Свойства арифметической прогрессии

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов:
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$
2. Суммы членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов, равны между собой:
$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}.$$

Пример 1. Первый и четвертый члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,2 и 2,1. Найти сумму первых шести ее членов.

Решение. $a_1 = 1{,}2; \quad a_4 = 1{,}8; \quad S_6 - ?$.

Т.к. $a_4 = a_1 + 3 \cdot d$, то $2{,}1 = 1{,}2 + 3 \cdot d$, $d = 0{,}3$.

$S_6 = \dfrac{2a_1 + 5 \cdot d}{2} \cdot 6$, $S_6 = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 + 5 \cdot 0{,}3}{2} \cdot 6 = 11{,}7$.

Ответ: 11,7.

Пример 2. Определить номер члена арифметической прогрессии равного 80, если сумма первых двух членов этой прогрессии равна 10, а пятый член равен 26?

Решение. $a_n = 80;\ \ a_5 = 26;\ \ S_2 = 10;\ \ n - ?$

Т.к. $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4 \cdot d$, то составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 10 \\ a_1 + 4 \cdot d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 - 2a_1 \\ a_1 + 40 - 8a_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 - 2a_1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ найдем $80 = 2 + 6 \cdot (n-1),\ n = 14$.

Ответ: 14.

Пример 3. Вычислить сумму членов прогрессии 7,5+9,8+12,1+…+53,5.

Решение. Т.к. для данной последовательности чисел выполняется свойство арифметической прогрессии $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, т.е. $9{,}8 = \dfrac{7{,}5 + 12{,}1}{2}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 7{,}5;\ d = 9{,}8 - 7{,}5 = 2{,}3;\ \ a_n = 53{,}5$.

Т.к. $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, т.е. $53{,}5 = 7{,}5 + 2{,}3 \cdot (n-1),\ n = 21$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_{21} = \frac{7{,}5 + 53{,}5}{2} \cdot 21 = 640{,}5.$$

Ответ: 640,5.

Пример 4. Найти сумму всех трехзначных чисел, кратных пяти.

Решение. Трехзначные числа 100, 105, 110, …, 990, 995 образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 100$, $d = 105 - 100 = 5;\ \ a_n = 995$.

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ найдем $995 = 100 + 5 \cdot (n-1),\ n = 180$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_{180} = \frac{100 + 995}{2} \cdot 180 = 98550.$$

Ответ: 98550.

Решить задачи:

7.1.1. Найти шестой член арифметической прогрессии 23; 15…

7.1.2. В арифметической прогрессии первый член равен 4, разность 2. Найти пятнадцатый член прогрессии.

7.1.3. а) Пятый член арифметической прогрессии равен 8,4, а ее десятый член равен 14,4. Найти пятнадцатый член этой прогрессии.

б) Четвертый член арифметической прогрессии равен 4,5, а ее двенадцатый член равен -12. Найти двадцатый член этой прогрессии.

7.1.4. а) Первый член арифметической прогрессии равен 6, а ее разность равна 4. Начиная с какого номера члены этой прогрессии больше 260?

б) Первый член арифметической прогрессии равен 380, а ее разность равна -6. Начиная с какого номера члены этой прогрессии меньше 100?

7.1.5. В арифметической прогрессии первый член равен 8, разность 4. Найти сумму шестнадцати членов прогрессии.

7.1.6. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если: а) $a_9 = 12, S_9 = 126$;

а) $a_{11} = 92, S_{11} = 22$.

7.1.7. а) Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

б) Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.

7.1.8. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111. Второе больше первого в 5 раз. Найти первое число.

7.1.9. Найти арифметическую прогрессию, у которой $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = -3$.

7.1.10. Найти первые три члена арифметической прогрессии, у которой сумма первого и девятого членов равна 6, а произведение третьего и седьмого членов равно 8.

7.1.11. Найти первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, у которой сумма всех первых десяти членов и сумма членов с четными номерами, входящими в эту десятку, равны 1.

7.1.12. Сумма трех чисел образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих чисел равна $14/9$. Найти эти числа.

7.1.13. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

7.1.14. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56. Сумма четырех последних членов равна 112. Найти число членов прогрессии, если первый ее член равен 11.

7.1.15. Определить при каких x три числа a_1, a_2, a_3 взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию: $a_1 = lg\,2$, $a_2 = lg(2^x - 6)$, $a_3 = lg(2^x + 34)$.

7.1.16. Решить уравнение $(x+1)+(x+5)+(x+9)+\ldots+(x+157)=3200$.

7.1.17. Решить уравнение $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{x-1}{(x+1)^2}+\dfrac{x-2}{(x+1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{19}{40}$.

7.1.18. Вычислить сумму $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1^2$.

7.1.19. Найти сумму всех нечетных трехзначных чисел.

7.1.20. Известно, что при любом n сумма S_n членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти разность прогрессии.

7.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, умноженному на некоторое отличное от нуля постоянное число q. Таким образом,

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где b_n *и* b_{n+1} соответственно n и $n+1$-й члены прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии, $q \neq 0$.

Например, 2, 6, 18, 54, … $(b_1 = 2, q = 3)$

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формулы суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \ (q \neq 1).$$

Свойства геометрической прогрессии

1. Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

2. Для конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от ее концов, есть число постоянное:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1}.$$

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется бесконечно убывающей, а ее сумма определяется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 1. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

Решение. $q = -2; \ S_5 = 5{,}5; \ b_5 - ?$.

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $S_5 = \frac{b_1(1-(-2)^5)}{1-(-2)}$, т.е. $5{,}5 = \frac{b_1 \cdot 33}{3} \Rightarrow b_1 = 0{,}5$.

$b_5 = b_1 \cdot q^4$, $b_5 = 0{,}5 \cdot (-2)^4 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 2. Сумма второго и четвертого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 30, а их произведение 144. Найти сумму девяти членов этой прогрессии.

Решение. По условию задачи составим систему уравнений $\begin{cases} b_2 + b_4 = 30 \\ b_2 \cdot b_4 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 6 \\ b_4 = 24 \end{cases}$ (второе решение системы $b_2 = 24, \ b_4 = 6$ не рассматриваем, т.к. по условию задачи прогрессия возрастает, т.е. $q > 1$).

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ имеем $b_2 = b_1 \cdot q$ и $b_4 = b_1 \cdot q^3$. Найдем отношение b_4 к b_2: $\frac{b_4}{b_2} = \frac{24}{6} = 4 = q^2 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}$. Второй корень не подходит, т.к. $q > 1$.

Т.к. $b_2 = 6$, $q = 2$, то $b_1 = \frac{6}{2} = 3$.

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $S_9 = \frac{3(1-2^9)}{1-2} = 1533$.

Ответ: 1533.

Пример 3. Вычислить сумму членов прогрессии $32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + ...$

Решение. Т.к. для данной последовательности чисел выполняется свойство геометрической прогрессии $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, т.е. $\left(-\frac{96}{5}\right)^2 = 32 \cdot \frac{288}{25}$, то эта последовательность является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 32;\ q = -\frac{3}{5}$.

Т.к. $S = \frac{b_1}{1-q}$, то $S = \frac{32}{1-(-3/5)} = 20$.

Ответ: 20.

Пример 4. Если от третьего члена геометрической прогрессии отнять 4, то первые три члена образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Найти исходную геометрическую прогрессию.

Решение. По условию задачи последовательность $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2 - 4$ образует арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$. Тогда можно составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + 2 = b_1q \\ b_1q + 2 = b_1q^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q-1) = 2 \\ b_1q(q-1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q-1) = 2 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$$

Таким образом, $b_2 = 3,\ b_3 = 9$.

Ответ: 1, 3, 9, ...

Решить задачи:

7.2.1. Найти шестой член геометрической прогрессии -1; 5;… .

7.2.2. В геометрической прогрессии первый член равен 64, знаменатель $1/4$. Найти пятый член прогрессии.

7.2.3. В геометрической прогрессии первый член равен 486, знаменатель $1/3$. Найти сумму четырех первых членов прогрессии.

7.2.4. Вычислить сумму членов прогрессии 432+72+12+2+… .

7.2.5. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма третьего и пятого членов равна 40, а произведение второго и четвертого равна 64.

7.2.6. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первых четырех членов равна 400, а сумма первого и третьего равна 100.

7.2.7. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее четвертый член равен $1/24$, знаменатель равен $1/2$.

7.2.8. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен -4. Найти сумму первых четырех членов этой прогрессии.

7.2.9. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 45**,** а сумма второго и третьего членов равна 30. Найти эти три члена прогрессии.

7.2.10. В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой – число положительное, $b_1 \cdot b_2 = 27$, а $b_3 \cdot b_4 = 1/3$. Найти эти четыре члена прогрессии.

7.2.11. Найти сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

7.2.12. Найти четыре числа образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

7.2.13. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно $b_4 - b_2 = -\dfrac{45}{32}$, $b_6 - b_4 = -\dfrac{45}{512}$.

7.2.14. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести первых членов равна 1820.

7.2.15. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислить сумму первых пяти членов этой прогрессии.

7.2.16. Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 3069?

7.2.17. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 32, а сумма ее первых пяти членов равна 31. Найти первый член прогрессии.

7.2.18. Сумма трех чисел, составляющих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

7.2.19. Три числа a_1, a_2, a_3, образуют арифметическую прогрессию. Если к последнему числу прибавить 9 и сохранить порядок, то числа образуют геометрическую прогрессию. Если после этого к первому числу прибавить 9 и переставить его со вторым, то опять получим арифметическую прогрессию. Чему равны исходные числа?

7.2.20. Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найти эти числа, если их сумма равна 42.

7.3. Задания для подготовки к ЕГЭ

Задания с кратким и полным ответом (уровень части В, С)

7.3.1. Найти сумму всех двузначных положительных чисел.

7.3.2. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 1.

7.3.3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен -4. Найти сумму первых четырех членов этой прогрессии.

7.3.4. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 115, а сумма последних пяти равна 515, $a_1 = 13$. Найти число членов этой прогрессии.

7.3.5. Произведение второго и четвертого членов арифметической прогрессии равно 7. Сумма первых пяти членов равна -20. Найти разность этой прогрессии, если известно, что она отрицательна.

7.3.6. От деления шестнадцатого члена арифметической прогрессии на пятый в частном получается три, а от деления двадцать первого члена на шестой в частном получается 3 и в остатке 12. Найти сумму первых трех членов прогрессии.

7.3.7. Одиннадцатый член арифметической прогрессии равен -17, а сумма первых сорока восьми членов равна -2112. Найти сумму третьего, одиннадцатого и двенадцатого членов этой прогрессии.

7.3.8. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 2600 руб., а за каждое следующее кольцо платили на 200 руб. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 4000 руб. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $2244\frac{4}{9}$ руб. Сколько колец было установлено?

7.3.9. Турист поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

7.3.10. Найти разность убывающей арифметической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.
7.3.11. Сумма первых двенадцати членов арифметической прогрессии равна 78, а тринадцатый член равен 26. Найти число членов прогрессии, принадлежащих интервалу (0; 15).
7.3.12. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 9:10. Найти первый член прогрессии, если ее сумма равна 12.
7.3.13. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен -0,5.
7.3.14. Четвертый член геометрической прогрессии $b_4 = 2$. Найти произведение $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 \cdot b_6$.
7.3.15. В геометрической прогрессии $b_1 \cdot b_3 \cdot b_{11} = 8$. Найти $b_2 \cdot b_8$.
7.3.16. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго на третий, и третьего на первый, в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.
7.3.17. Найти 10q, где q – знаменатель убывающей геометрической прогрессии, у которой произведение первых трех членов равно 1000, а сумма их квадратов равна 525.
7.3.18. Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если последнее из них уменьшить вдвое, то получится арифметическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии.
7.3.19. Произведение трех положительных чисел, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии, равно 64, а произведение их логарифмов по основанию 2 равно 6. Найти сумму этих чисел.
7.3.20. Дан квадрат со стороной 128 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т.д. Найти длину стороны седьмого квадрата.

Глава 8

Текстовые задачи

Существует много различных типов текстовых задач. Мы рассмотрим четыре основные типа: задачи «на движение», задачи «на работу», задачи «на концентрацию» и задачи «на проценты».

8.1. Задачи «на движение»

К задачам на движение относят 3 основных типа задач:

1. Движение в разных направлениях.
2. Движение в одном направлении.
3. Движение по воде.

При решении текстовых задач очень важно правильно построить чертеж и на нем отметить все данные.

Формулы для решения задач данного типа:

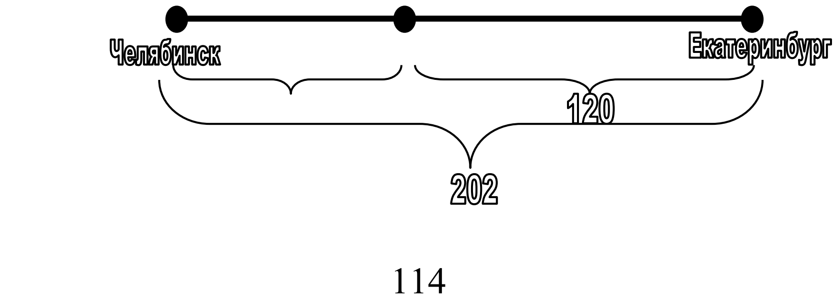
$$S = \upsilon \cdot t, \qquad \upsilon = \frac{S}{t}, \qquad t = \frac{S}{\upsilon}$$

где S – путь, υ – скорость, t – время.

Движение в разных направлениях.

Пример. Из Челябинска в Екатеринбург вышел пассажирский поезд, а через 15 минут навстречу ему из Екатеринбурга в Челябинск отправился товарный поезд, который шел со скорость в 2 раза большей, чем скорость пассажирского поезда. Товарный поезд, пройдя 120 км, встретился с пассажирским поездом. Найти скорость каждого поезда, зная, что расстояние между городами 202 км.

Решение.



Пусть x – скорость пассажирского поезда, тогда $2x$ – скорость товарного поезда. Т.к. товарный поезд прошел 120 км, а расстояние между городами 202, значит, пассажирский поезд прошел 82 км (202-120=82).

Из формулы $t = \frac{S}{\upsilon}$, получим время для пассажирского (п) и товарного (т) поездов: $t_п = \frac{82}{x}$, $t_т = \frac{120}{2x}$.

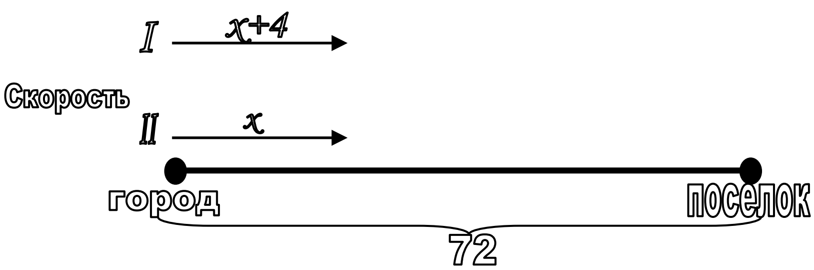
Известно, что пассажирский поезд ехал на 15 минут больше, чем товарный (т.к. скорость мы будем измерять в км/ч, нужно перевести минуты в часы, 15 мин = $\frac{1}{4}$ часа). Значит верно будет равенство: $t_п - \frac{1}{4} = t_т$. Подставляя в равенство значения $t_п$ и $t_т$, получаем уравнение: $\frac{82}{x} - \frac{1}{4} = \frac{120}{2x}$. Решая его, получаем, что x=88. Тогда $2x$=176.

Ответ: скорость пассажирского поезда равна 88 км/ч;
скорость товарного поезда равна 176 км/ч.

Движение в одном направлении.

Пример. Два автобуса отправились одновременно из города в поселок, расстояние до которого 72 км. Первый автобус двигался со скоростью, превышающей скорость второго автобуса на 4 км/ч, и прибыл в пионерлагерь на 15 мин раньше, чем второй автобус. Найдите скорость каждого автобуса.

Решение.



Пусть скорость второго автобуса x км/ч, тогда скорость первого автобуса $(x+4)$ км/ч. Так как расстояние между городом и поселком

72 км, можем найти время первого и второго автобусов: $t_{\text{I}} = \dfrac{72}{x+4}$, $t_{\text{II}} = \dfrac{72}{x}$.

Известно, что первый автобус прибыл в поселок на 15 минут ($\frac{1}{4}$ часа) раньше, чем второй автобус. Значит верно будет равенство: $t_{\text{I}} - \dfrac{1}{4} = t_{\text{II}}$. Подставляя в равенство значения t_{I} и t_{II} получаем уравнение: $\dfrac{72}{x+4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{72}{x}$. Решая его, получаем, что $x=32$. Тогда $x+4=36$.

Ответ: 32 км/ч, 36 км/ч.

Движение по воде.

При решении задач этого типа необходимо учитывать скорость воды: если тело движется по течению реки, то его скорость υ получается в результате сложения скорости в стоячей воде и скорости течения реки; против течения реки – разность скорости в стоячей воде и скорости течения реки, в стоячей воде (озеро) скорость воды считать равную 0.

Пример. Группа школьников отправляется на катере от лагеря по течению реки с намерением вернутся обратно через 8 ч. Скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость катера 10 км/ч. На какое наибольшее расстояние по реке они могут отплыть, если перед возвращением они планируют побыть на берегу 3 ч?

Решение.

Для решения данной задачи составим таблицу:

	S	υ	t
по течению реки	x	12	$\frac{x}{12}$
против течения реки	x	8	$\frac{x}{8}$

Пусть расстояние по реке, которое они проплывут x км. Скорость катера по течению 12 км/ч (10+2=12), а скорость катера против течения 8 км/ч (10-2=8). Тогда $t_{по\ течению} = \frac{x}{12}$, $t_{против\ течения} = \frac{x}{8}$. Так как всё путешествие составляет 8 ч, а на берегу школьники планируют побыть 3 ч, то на путь по течению и против течения они могут затратить 5 ч (8-3=5). Значит верно равенство:

$$t_{по\ течению} + t_{против\ течения} = 5.$$

Подставляя конкретные значения в уравнение, получим: $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} = 5$. Решая уравнение, получим, что x=24.

Ответ: 24 км.

Задачи для самостоятельного решения:

8.1.1. Из двух городов, расстояние между которыми 210 км, навстречу друг другу выехали одновременно мотоциклист и велосипедист и встретились через 3 часа. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что мотоциклист проезжает за час на 60 км больше, чем велосипедист.

8.1.2. От пристани А отошел теплоход со скоростью 55 км/ч. Через 30 мин от пристани В навстречу ему отошел второй теплоход, скорость которого 38 км/ч. Через сколько часов после отправления первого теплохода они встретятся, если расстояние между пристанями А и В равно 205 км.

8.1.3. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 18 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Скорость одного из них на 5 км/ч меньше скорости другого. Велосипедист, который первым прибыл в В, сразу же повернул обратно и встретил другого велосипедиста через 1 ч 20 мин после выезда из А. На каком расстоянии от пункта В произошла встреча?

8.1.4. Из пункта А в пункт В, расстояние до которого 33 км, одновременно выехали два велосипедиста. Один из велосипедистов, двигаясь со скоростью, превышающей скорость второго велосипедиста на 4 км/ч, прибыл в пункт В на 48 мин раньше, чем второй. Сколько времени находился в пути каждый велосипедист?

8.1.5. Два мотоциклиста выезжают одновременно в город из пункта, отстоящего от него на 160 км. Скорость одного из них на 8 км/ч больше скорости другого, поэтому он приезжает к месту назначения на 40 мин раньше. Найдите скорости мотоциклистов.

8.1.6. Рыболов отправляется на лодке от пристани против течения реки с намерением вернуться назад через 5 ч. Перед возвращением он хочет побыть на берегу 2 ч. На какое наибольшее расстояние он может отплыть, если скорость течения реки 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

8.1.7. Теплоход, собственная скорость которого 8 км/ч, прошел по реке расстояние, равное 15 км, по течению и такое же расстояние против течения. Найдите скорость течения реки, если время, затраченное на весь путь, равно 4 ч.

8.1.8. Теплоход прошел 28 км по течению реки и 25 км против течения, затратив на весь путь столько же времени, сколько ему понадобилось бы для прохождения 54 км в стоячей воде. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если известно, что скорость течения равна 2 км/ч.

8.2. Задачи «на работу»

Задачи на работу имеют особенность решения, которую нужно **запомнить**. Если в условии задачи не известен объем работы, то его нужно принимать за 1.

Формулы для решения задач данного типа:

$$A = P \cdot t, \qquad P = \frac{A}{t}, \qquad t = \frac{A}{P},$$

где A – объем работы, P – производительность труда, t – время.

Для упрощения решения необходимо построить таблицу вида:

	A	P	t
I			
II			

Пример. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 ч 55 мин. Вторая труба может наполнить его на 2 ч скорее, чем первая. За какое время наполнит бак каждая труба, работая отдельно?

Решение.

	A	P	t
I	1		*x*
II	1		*x-2*

Так как объем работы не известен, обозначим его за 1. В условии задачи необходимо найти время, поэтому обозначим время наполнения бака первой трубой за x, тогда (x-2) – время наполнения бака второй трубой. Тогда по формуле $P=\frac{A}{t}$, найдем производительность первой и второй трубы: $P_I=\frac{1}{x}$, $P_{II}=\frac{1}{x-2}$.

	A	P	t
I	1	$\frac{1}{x}$	*x*
II	1	$\frac{1}{x-2}$	*x-2*

По условию задачи известно, что бак наполняется двумя трубами (т.е. их общая производительность будет $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right)$ за 2 ч 55 мин $\left(2\frac{11}{12}\,ч\right)$.

Пользуясь формулой: $A=P\cdot t$ получим уравнение:

$$1=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right)\cdot 2\frac{11}{12}.$$

Решая его, получим, что $x_1=7$ или $x_2=\frac{10}{12}$. Второе решение является посторонним, т.к. если принять его за решение, то производительность второй трубы отрицательна, получаем противоречие. Значит, x=7, x-2=5.

Ответ: 7 ч, 5 ч.

Задачи для самостоятельного решения.

8.2.1. Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, может выполнить это задание на 5 ч скорее, чем второй. За какое время может выполнить задание первый комбайн, работая один?

8.2.2. Карлсон один может съест 4 банки с вареньем за 8 минут, а вдвоем с Сиропчиком они съедают 10 банок с вареньем за 12 минут. На сколько процентов скорость съедания варенья у Карлсона выше, чём у Сиропчика?

8.2.3. Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать весь огород за 4 часа. Однако вместе они проработали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа на огороде была выполнена за 7 часов?

8.2.4. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1:3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

8.2.5. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 ч. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2:5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 ч?

8.3. Задачи «на концентрацию»

При решении задач на концентрацию следует разделить сплавы на элементы и построить таблицу:

	Масса	I элемент	II элемент	и т.д.
I сплав				
II сплав				
и т.д.				

Пример. В мастерской имеются два слитка сплава серебра с оловом. Первый слиток состоит из 360 г серебра и 40 г олова, а второй – из 450 г серебра и 150 г олова. Из этих слитков надо получить 200 г сплава, содержание серебра в котором 81%. Определите массу куска, который для этого необходимо взять от второго слитка.

Решение.

	масса	серебро	олово
I слиток	400	360 (90%)	40 (10%)
II слиток	600	450 (75%)	150 (25%)
Сплав	200	81%	19%

Пусть x – масса куска, который нужно взять для сплава от I слитка, тогда y – масса куска, который нужно взять для сплава от II слитка.

Составим новую таблицу:

	масса	серебро	олово
1 кусок (I слиток)	x	90%	10%
2 кусок (II слиток)	y	75%	25%
Сплав	200	81%	19%

Так как сплав состоит из суммы масс 1 и 2 кусков, получим уравнение: $x+y=200$. Масса серебра в первом куске – $\frac{x\cdot 90}{100}$ г, во втором куске – $\frac{y\cdot 75}{100}$ г, а в сплаве – $\frac{200\cdot 81}{100}$ г. Значит, получим уравнение: $\frac{x\cdot 90}{100}+\frac{y\cdot 75}{100}=\frac{200\cdot 81}{100}$.

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ \frac{x\cdot 90}{100}+\frac{y\cdot 75}{100}=\frac{200\cdot 81}{100} \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем, что x=80, y=120.

Ответ: 120г.

Задачи для самостоятельного решения.

8.3.1. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

8.3.2. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушеные – 12%. Сколько получится сушеных грибов из 88 кг свежих?

8.3.3. Имеется два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 30% и 80% соответственно. В каком отношении надо взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 60% меди?

8.3.4. Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

8.3.5. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20%. Сколько железа осталось в руде?

8.3.6. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали каждого сорта следует взять, чтобы получить после переплавления 140 т стали с содержанием никеля 30%?

8.3.7. Имеется 3 слитка. Масса первого – 5 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

8.3.8. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 г первого сплава и 250 г второго, получим новый сплав, в котором будет 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

8.4. Задачи «на проценты»

Задачи для самостоятельного решения.

8.4.1. Объем ежемесячной продажи компьютеров в первом, втором и третьем магазинах относятся как 7:5:10. В связи с сокращением торговых площадей планируется уменьшить месячную продажу компьютеров в первом магазине на 11% и во втором на 15%. На сколько процентов нужно увеличить месячную продажу компьютеров в третьем магазине, чтобы суммарный объем продаваемых за месяц компьютеров не изменился?
8.4.2. По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечению каждого года эти проценты капитализируются, т.е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счет в 50 000 руб., который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечению этого срока?
8.4.3. Сумма двух чисел равна 24. Найти меньшее из них, если 35% одного из них равны 85% другого.
8.4.4. На товар снизили цену сначала на 20%, а затем еще на 15%. При этом он стал стоить 23,8 р. Какова была первоначальная цена товара?
8.4.5. Цена на товар была понижена на 20%. На сколько процентов ее нужно повысить, чтобы получить исходную цену?
8.4.6. Завод увеличивал объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции увеличился на 21%.
8.4.7. Цену товара первоначально снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 30% и, наконец, после перерасчета произвели снижение на 50%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Глава 9

Задания с параметрами

9.1. Общие положения

Иногда в уравнениях некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются *параметрами*. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые допустимые числовые значения, то есть одно уравнение с параметрами задает множество уравнений (для всех возможных значений параметров).

Решить уравнение с параметрами означает следующее:

1) *исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при различных значениях параметров;*
2) *найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.*

Пример 1. Определить число корней уравнения $ax^2-4x+(a+3)=0$.

Решение.

1) Данное уравнение имеет один параметр a. Если $a=0$, то получим линейное уравнение $-4x+3=0$, которое имеет один корень.

2) При $a\neq 0$ уравнение является квадратным. Четверть его дискриминанта выражается формулой: $\frac{1}{4}D=4-a(a+3)$. Число корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта, поэтому определим, при каких значениях $a\neq 0$ дискриминант больше 0, равен нулю и меньше нуля.

$D(a)=-a^2-3a+4$. Графиком этого квадратного трехчлена является парабола, ветви которой направлены вниз. Его корни равны -4 и 1. Трехчлен положителен в межкорневом интервале, из которого нужно исключить $a=0$, и отрицателен на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(1;+\infty)$.

Принимая во внимание результаты пункта 1), получаем

Ответ:

- уравнение имеет *один* корень при $a=0$, $a=-4$, $a=1$;
- *два* различных действительных корня при $a\in(-4;0)\cup(0;1)$;

- *не имеет* действительных корней при $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. При каких значениях *a* уравнение

$$1 - \frac{3}{x+a-1} = \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)} \qquad (1)$$

имеет два *различных* действительных корня?

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю. Получим равносильное уравнение

$$\frac{x^2 + (a-3)x - 4(a+1)}{(x+a-1)(x+1)} = 0. \qquad (2)$$

Перейдем от уравнения (2) к уравнению-следствию:

$$x^2 + (a-3)x - 4(a+1) = 0, \qquad (3)$$

то есть $x_1 = 4$, $x_2 = -a-1$.

Среди этих корней могут быть посторонние. Кроме того, при некоторых значениях *a* найденные корни могут оказаться равными, но, по условию задачи, нужно найти только те значения параметра, при которых уравнение имеет *различные* корни.

Для того чтобы $x_1 = 4$ было корнем уравнения (1), нужно потребовать, чтобы $4 + a - 1 \neq 0$, то есть $a \neq -3$.

Чтобы $x_2 = -a-1$ являлось корнем уравнения (1), потребуем, чтобы выполнялись условия: $-a-1+a-1 \neq 0$ и $-a-1+1 \neq 0$. Первое условие выполняется при любом значении *a*, а второе при $a \neq 0$.

Наконец, нужно потребовать, чтобы полученные корни были различными, то есть $4 \neq -a-1$, откуда $a \neq -5$.

Ответ: при $a \neq -5$, $a \neq -3$, $a \neq 0$ данное уравнение имеет два различных действительных корня.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 10 - a = 0, \\ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + a = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Сложив первое уравнение со вторым, перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-8x-4y+10=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2), в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} 2(x-2)^2+2(y-1)^2=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0. \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы не зависит от параметра *a*, и имеется единственная пара чисел $(2;1)$, которая удовлетворяет этому уравнению. Значит, система совместна только в том случае, когда эта пара чисел удовлетворяет и второму уравнению системы, то есть выполняется равенство $-1+a=0$. Отсюда следует, что только при $a=1$ данная система совместна.

Ответ: при $a=1$ система имеет решение $(2;1)$;
при $a\neq 1$ система несовместна.

Решить самостоятельно:

9.1.1. При каких *a* система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения?

9.1.2. При каких *a* система уравнений $\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ 2x+(a+6)y=a+3 \end{cases}$ не имеет решений?

9.1.3. При каких *m* система уравнений $\begin{cases} (m-2)x+27y=4{,}5, \\ 2x+(m+1)y=-1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

9.1.4. При каждом значении параметра *a* укажите число решений системы уравнений $\begin{cases} x+y+2=a, \\ y=x^2-4. \end{cases}$

9.1.5. При каких значениях параметра *a* уравнение $(x^2-2x)^2-(a+2)(x^2-2x)+3a-3=0$ имеет четыре различных корня?

9.1.6. При каких значениях параметра *p* уравнение

$(x-p)^2(p(x-p)^2-p-1)=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

9.1.7. Решите уравнение $a(2a+4)x^2-(a+2)x-5a-10=0$.

9.2. Задания для подготовки к ЕГЭ

Задания с кратким ответом (уровень части В)

Пример. При каком значении параметра *a* функция $y=\operatorname{arctg}(3x^2-ax+x+11)$ имеет минимум в точке с абсциссой 0,5?

Решение.

1) Данная функция является суперпозицией двух функций: $f(t)=\operatorname{arctg} t$ и $g(x)=3x^2-ax+x+11$. Так как функция $f(t)=\operatorname{arctg} t$ возрастает, то промежутки монотонности функции *f* на ее области определения *совпадают* с промежутками монотонности функции *g*, поэтому функция *g* имеет минимум в той же точке, что и функция *f*.

2) Функция $g(x)=3x^2-ax+x+11$ – квадратичная. Так как коэффициент при x^2 положителен, то абсцисса x_0 вершины параболы, являющейся графиком данной функции, – точка минимума. Для нахождения x_0 преобразуем выражение, задающее функцию *g*:

$$g(x)=3x^2-ax+x+11=3x^2+(1-a)x+11,$$

$$x_0=\frac{a-1}{6}.$$

По условию задачи, $x_0=0{,}5$, откуда $a=4$.

Ответ: данная функция имеет минимум в точке с абсциссой 0,5 при $a=4$.

Решить самостоятельно:

9.2.1. При каком значении *p* функция $y=\sqrt[3]{8-px-8x^2}$ имеет максимум в точке $x_0=1{,}75$?

9.2.2. При каком значении *m* функция $y=\dfrac{1}{-x^2+mx-(m^2+1)}$ имеет минимум при $x=-1$?

9.2.3. Найти наименьшее целое k, при котором функция $y = \frac{2}{3}x^3 + kx^2 - kx + 7$ не имеет экстремумов.

9.2.4. При каком значении a наибольшее значение функции $y = 5 \cdot 2^{ax^2 - x^3 + 1}$ на отрезке [0; 7] достигается при $x = 5$?

9.2.5. При каком значении a сумма наибольшего и наименьшего значения функции $y = 60x - 10x^3 - 15x^2 + 4a$ на отрезке [-3; 3] равна 0?

Задания с полным ответом. Повышенный уровень (C_1, C_2)

Пример 1. Найдите наибольшее целое отрицательное значение t, при котором уравнение $\cos^2 x - 5t = 4 - 2t \cdot \cos^2 x$ не имеет корней.

Решение.

Найдем сначала те значения параметра t, при которых данное уравнение корни *имеет*.

Пусть $\cos^2 x = a,$ тогда $0 \le a \le 1.$ Данное уравнение примет вид:

$$a - 5t = 4 - 2at \tag{1}$$

Преобразуем уравнение (1) в равносильное ему следующим образом:

$$(1 + 2t) \cdot a = 4 + 5t \tag{2}$$

1) При $t = -0{,}5$ из уравнения (2) получаем: $0 \cdot a = 1{,}5$. Это уравнение решений не имеет.

2) Если $t \ne -0{,}5$, то, разделив обе части уравнения (2) на ненулевое выражение $1 + 2t$, имеем следующее уравнение:

$$a = \frac{4 + 5t}{1 + 2t} \tag{3}$$

Так как $0 \le a \le 1$, то уравнение (3) будет иметь решение тогда и только тогда, если $0 \le \frac{4 + 5t}{1 + 2t} \le 1$, что равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{4 + 5t}{1 + 2t} \ge 0, \\ \dfrac{4 + 5t}{1 + 5t} \le 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $t \in [-1; -0{,}8]$.

3) Теперь ответим на вопрос задачи. Уравнение (3) имеет решение на отрезке $[-1;-0{,}8]$, значит, *не имеет* его при всех остальных допустимых значениях параметра t, то есть при $t\in(-\infty;-1)\cup(-0{,}8;+\infty)$. Наибольшее целое отрицательное t из этого промежутка равно -2.

Ответ: наибольшее целое отрицательное t, при котором данное уравнение не имеет корней, равно -2.

Пример 2. При каких значениях параметра a графики функций $y=\sin 2x+a\cos x+4\sin x+3a$ и $y=\cos x+2a\sin x+a^2+2$ не имеют общих точек?

Решение.

Ответим сначала на вопрос, при каких значениях параметра a графики данных функций имеют хотя бы одну общую точку. Это равносильно задаче отыскания решений следующего уравнения:

$$\sin 2x+a\cos x+4\sin x+3a=\cos x+2a\sin x+a^2+2 \qquad (1)$$

Преобразуем уравнение (1):

$$\sin 2x+a\cos x+4\sin x+3a-\cos x-2a\sin x-a^2-2=0,$$

$$a^2+a(2\sin x-\cos x-3)+\cos x+2-2\sin x\cdot\cos x-4\sin x=0,$$

$$a^2+a(2\sin x-\cos x-3)+(1-2\sin x)(\cos x+2)=0. \qquad (2)$$

Решим уравнение (2) относительно параметра a. Заметим, что свободный член этого квадратного уравнения равен произведению выражений $1-2\sin x$ и $\cos x+2$, а второй коэффициент – сумме этих же выражений, поэтому

$$\left[\begin{array}{l} a=1-2\sin x, \\ a=2+\cos x. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Совокупность (3) будет иметь решения не при всех значениях параметра a, так как функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ являются ограниченными.

Оценим границы изменения выражений $1-2\sin x$ и $\cos x+2$:

$$\left[\begin{array}{l} -1\le 1-2\sin x\le 3, \\ 1\le \cos x+2\le 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le a\le 3, \\ 1\le a\le 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow -1\le a\le 3.$$

Итак, графики данных функций имеют хотя бы одну общую точку при $a \in [-1; 3]$, откуда следует, что они не имеют общих точек при всех остальных допустимых значениях параметра *a*.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Решить самостоятельно:

9.2.6. При каких значениях параметра *m* уравнение $mx^{-2} + 2 = 3m - 2x^{-2}$ не имеет корней?

9.2.7. При каких значениях параметра *a* уравнение $\log_{x^2+2}(4x^2 - 4a + a^2 + 7) = 2$ имеет ровно один корень?

9.2.8. При каких значениях параметра *a* прямая $y = 3a - 2a^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sin^2 x + a\cos x$?

Задания с полным ответом. Повышенный уровень (C_3, C_5)

Пример 1. Найти все значения *x* такие, что при любом значении параметра *a*, не принадлежащем промежутку [1; 3], выражение $x^2 + 6a$ не равно выражению $(2a-2)x + 15$.

Решение.

1) Найдем сначала те значения параметра *a*, при которых данные выражения равны, то есть уравнение

$$x^2 + 6a = 2ax - 2x + 15 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение.

В уравнении (1) уединим параметр, то есть перенесем все члены с параметром в одну часть, а все остальные – в другую:

$$x^2 - 2x - 15 = 2a(x-3). \qquad (2)$$

В уравнении (2) разложим на множители левую часть:

$$(x-3)(x+5) = 2a(x-3). \qquad (3)$$

1) Если $x = 3$, то уравнение (3) превращается в верное числовое равенство, то есть число 3 входит и в решение уравнения (3), и в решение уравнения (1) при любом значении параметра *a.*

2) Если $x \neq 3$, то разделим левую и правую часть уравнения (3) на выражение $x - 3$: $\qquad (x+5) = 2a \qquad (4)$

Уравнение (4) имеет решение при любом значении параметра *a,* в том числе и для значений, указанных в условии: $a \in (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

Учтем теперь границы изменения параметра. Так как из (4) следует, что $a = \dfrac{x+5}{2}$, то $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+5}{2} < 1, \\ \dfrac{x+5}{2} \geq 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Таким образом, при любом значении параметра *a*, не принадлежащем промежутку [1; 3], выражение $x^2 + 6a$ *равно* выражению $(2a-2)x + 15$, следовательно, эти выражения не равны для всех остальных значений *x*, входящих в область определения уравнения (1), условие задачи выполняется.

Ответ: [-3; 1).

Пример 2. Найти все значения параметра *c*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = c^4 - 6c^3 + 9c^2 - 19 + \sqrt{85}, & (1) \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4. & (2) \end{cases} \quad (*)$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Левые части уравнений (1) и (2) системы (*) представляют собой однородные функции, но ни одно из уравнений не является однородным. Для того, чтобы решить такую систему, нужно получить однородное уравнение. Для этого нужно уравнение (1) умножить на 4, а уравнение (2) – на правую часть уравнения (1) и из первого уравнения вычесть второе. Введем новую переменную:

$$c^4 - 6c^3 + 9c^2 - 19 + \sqrt{85} = t,$$

тогда система (*) после указанных преобразований будет иметь вид:

$$\begin{cases} (8-t)x^2 - (8+2t)xy + (40+3t)y^2 = 0, & (3) \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4. & (4) \end{cases} \quad (**)$$

Уравнение (3) – однородное. Решаем его стандартным способом. Так как при $x = 0$ $y = 0$, но эта пара значений не является решением уравнения (4) системы (**), то разделим обе части (3) на *y*:

$$(8-t)\left(\frac{x}{y}\right)^2-(8+2t)\frac{x}{y}+(40+3t)=0 \qquad (5)$$

Пусть $\frac{x}{y}=z$, тогда уравнение (5) будет иметь вид:

$$(8-t)z^2-(8+2t)\,z+(40+3t)=0 \qquad (5)$$

Для того, чтобы уравнение имело корни, нужно, чтобы четверть дискриминанта была неотрицательна:

$$\frac{1}{4}D=(4+t)^2-(8-t)(40+3t)=4t^2+24t-304,$$

$$4t^2+24t-304\ge 0. \qquad (6)$$

Разделим на 4 обе части уравнения (6):

$$t^2+6t-76\ge 0. \qquad (7)$$

Решение неравенства (7): $t\in(-\infty;\,-3-\sqrt{85}]\cup[-3+\sqrt{85};\,+\infty)$.

Обратим внимание на то, что из уравнения (1) системы (*) следует, что левая часть $2x^2-2xy+10y^2=(x^2-2xy+y^2)+x^2+9y^2>0$ (значение 0 исключается, так как ранее было доказано, что пара (0; 0) не является решением системы), поэтому и правая часть положительна: $t>0$. Но в этом случае из решения неравенства (7) нужно взять только промежуток $[-3+\sqrt{85};\,+\infty)$.

Вернемся к замене:

$$c^4-6c^3+9c^2-19+\sqrt{85}\ge -3+\sqrt{85},$$

$$c^4-6c^3+9c^2-16\ge 0,$$

$$c^2(c-3)^2-4^2\ge 0,$$

$$(c^2-3c-4)(c^2-3c+4)\ge 0, \qquad (8)$$

Дискриминант второго квадратного трехчлена неравенства (8) отрицателен, поэтому $c^2-3c+4>0$, тогда неравенство (8) сводится к следующему:

$$(c+1)(c-4)\ge 0, \qquad (9)$$

Откуда решение: $c\in(-\infty;\,-1]\cup[4;\,+\infty)$.

Ответ: данная система имеет хотя бы одно решение при $c \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Решить самостоятельно:

9.2.9. Найти все значения *x* такие, что при любом значении параметра *a*, не принадлежащем промежутку (0; 2], выражение $x^2 + a$ не равно выражению $(a-6)x+7$.

9.2.10. Найти все значения *a*, для которых при каждом *x* из промежутка (-1; 1] значение выражения $16^x + 5a \cdot 4^x$ не равно значению выражения $5+(a+1)\cdot 4^{x+1}$.

9.2.11. Найти все значения *a*, для которых при каждом *x* из промежутка (3; 9] значение выражения $2\log_3^2 x - 7$ не равно значению выражения $(a+1)\log_3 x$.

9.2.12. Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $a\sin^2 x = 2(a-3)\sin x + a + 7 > 0$ выполняется для любых значений *x*.

9.2.13. Найти все значения *a*, при которых область определения функции $y = \left((\sqrt{a})^{4x+6} + (x\sqrt{x})^2 \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a^3(a^4)^{-\log_2 0,25}\right)^{-0,5}$ не содержит двузначных натуральных чисел.

9.2.14. Найти все положительные значения параметра *m*, при которых число 2 не входит в область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{m^{2m^2x+5x} - m^{11mx+10}}}$.

9.2.15. Найти все положительные значения параметра *a*, при которых число 1 принадлежит области определения функции $y = \left(a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x}\right)^{0,5}$.

9.2.16. Найти все значения *b*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 - 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = b^4 - 4b^3 + 4b^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Глава 10

Геометрия

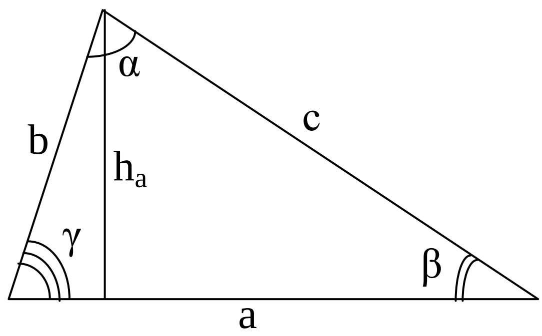
При решении задач по геометрии, а по стереометрии в особенности, чертеж имеет большое, а иногда и решающее значение. Часто именно чертеж позволяет лучше понять условие задачи и подсказать способ ее решения.

При выполнении чертежа по возможности рекомендуется учитывать заданные соотношения между элементами фигур. С другой стороны, полезно помнить, что некоторые из фигур, указанные в условии, можно совсем не изображать на чертеже. Так, на черте же, как правило, не изображают сферу, вписанную в многогранник или описанную вокруг него. Достаточно отметить на нем только центр этой сферы, выявив особенности его расположения, обусловленные данными в задаче условиями. Рисунок конуса или цилиндра часто заменяют их осевыми сечениями и т. п.

10.1. Планиметрия

Элементы планиметрии

Произвольный треугольник
a, b, c – стороны;
α, β, γ, - противолежащие им углы;
p – полупериметр;
R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности;
S – площадь;
h_a – высота, проведенная к стороне a.



$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a \qquad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \text{(теорема косинусов)}$$

$$S=\frac{abc}{4R}; \quad S=pr \qquad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \quad \text{(теорема синусов)}$$

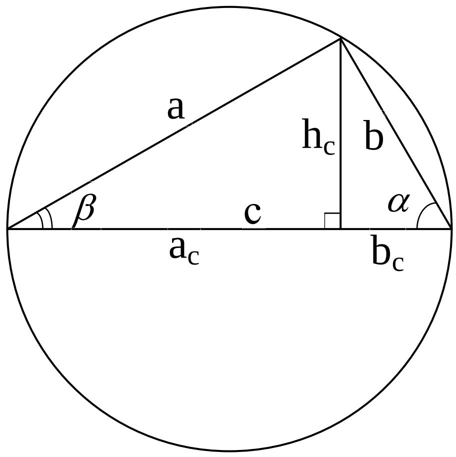
Следует иметь в виду, что:

а) центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис треугольника;

б) центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника;

в) медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Прямоугольный треугольник



a, b – катеты;
c – гипотенуза;
a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу.

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b;\qquad S=\frac{1}{2}c\cdot h_C;$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c);\qquad R=\frac{1}{2}c.$$

Центр описанной окружности находится на середине гипотенузы.

$c^2=a^2+b^2$ (теорема Пифагора)

$h^2=a_c\cdot b_c$ $\qquad a^2=a_c\cdot c$ $\qquad b^2=c\cdot b_c$

$\sin\alpha=\frac{a}{c};$ $\qquad \cos\alpha=\frac{b}{c};$ $\qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$

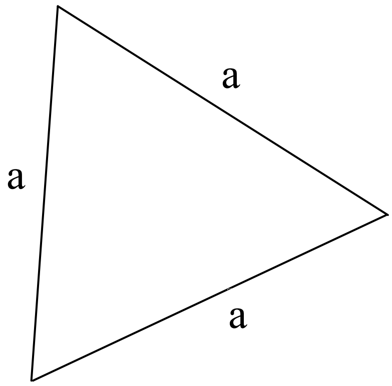
Отсюда следует, что:

а) в прямоугольном треугольнике синус угла равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе;

б) в прямоугольном треугольнике косинус угла равен отношению прилежащего этому углу катета к гипотенузе;

в) в прямоугольном треугольнике тангенс угла равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему катету.

Равносторонний треугольник

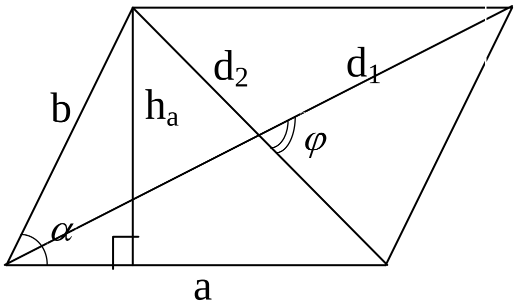


$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\quad r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\qquad R=2r$$

$h_a=h_b=h_C=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ – высоты

Параллелограмм

a и b – смежные стороны;
α – угол между ними;
d_1 и d_2 – диагонали;
φ – угол между ними;
h_a – высота, проведенная к стороне a;
S – площадь.



$S = a \cdot h_c$**;** $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$**;**

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$; $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

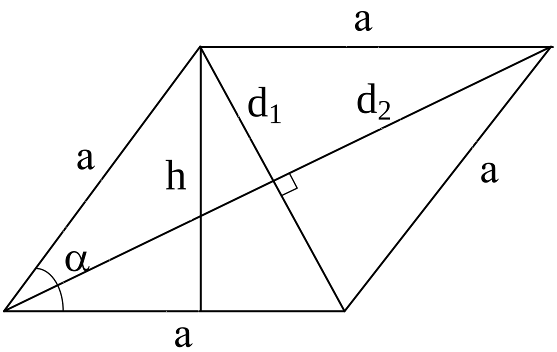
Ромб

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$\mathbf{d_1^2 + d_2^2 = 4a^2}$$

$$S = a^2 \sin\alpha$$

$$S = a\,h$$

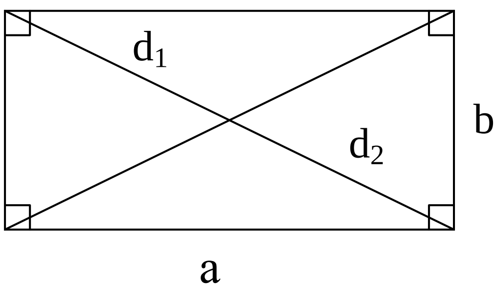


Прямоугольник

S = a·b;

$d_1 = d_2$.

Внутренние углы прямые.

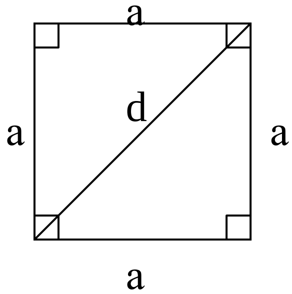


Квадрат

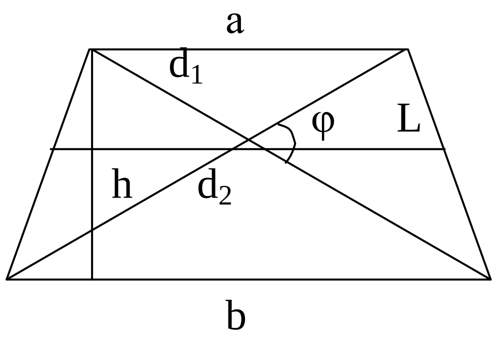
d – диагональ

$S = a^2$;

$S = \frac{1}{2} d^2$



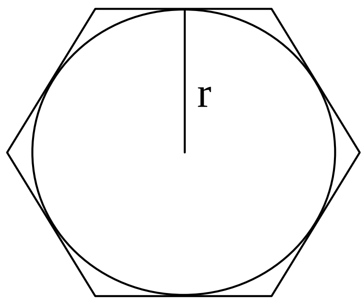
Трапеция



a и b – основания,
h – высота,
L – средняя линия,
d_1 и d_2 – диагонали;
φ – угол между диагоналями

$$S=\frac{a+b}{2}h;\quad S=L\cdot h;\quad S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Описанный многоугольник

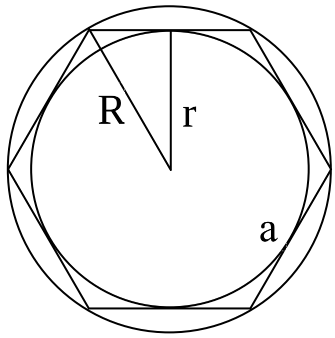


p – полупериметр,

r – радиус вписанной окружности

S = pr

Правильный многоугольник (все стороны и углы равны)



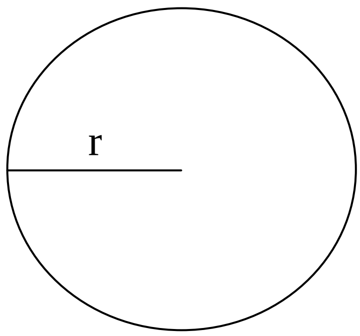
$$a_3=R\sqrt{3}$$

$$a_4=R\sqrt{2}$$

$$a_6=R$$

$$S=\frac{1}{2}n\cdot a_n\cdot r=p\cdot r$$

Окружность, круг



C – длина окружности;

r – радиус;

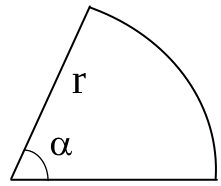
S – площадь круга;

$C = 2\pi r$; $\qquad S=\pi r^2$.

Сектор

L – длина дуги, ограничивающей сектор; S – площадь сектора;
n^o - градусная мера центрального угла;
α – радианная мера центрального угла

$$L = \frac{\pi \cdot r \cdot n^0}{180^0} = r \cdot \alpha \qquad S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^0}{360^0} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha$$



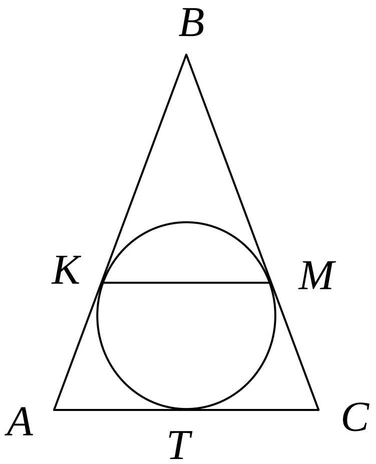
Решение задач

Треугольник. Вписанная и описанная окружность

Пример 1. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*, касается сторон *AB* и *BC* в точках *K* и *M* соответственно. Найдите *KM*, если *AK* = 6 м, *KB* = 12 м.

Дано: треугольник *ABC*, *AB* = *BC*, *AK* = 6 м, *BK* = 12 м, *K*, *M* и *T* – точки касания вписанной окружности.

Найти: *KM*.



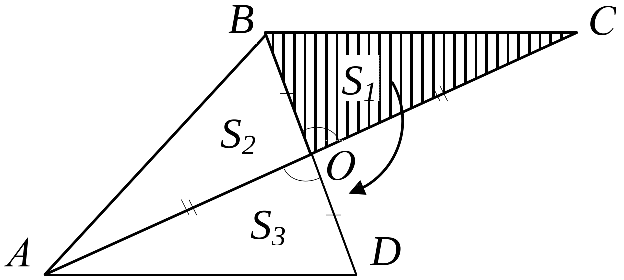
Решение.

1. По условию, *BC* + *AB* = 6 + 12 = 18 (м).
2. *BM* = *BK* = 12 м (отрезки касательных, проведенных из одной точки), следовательно, *AK* = *CM* = 18 – 12 = 6 (м).
3. *AT* = *AK* = 6 м, *CT* = *CM* = 6 м (отрезки касательных, проведенных из одной точки), следовательно, *AC* = 6 + 6 = 12 (м).
4. $\Delta KBM \sim \Delta ABC$ ($\angle B$ - общий, *BK* : *AB* = *BM* : *BC*), следовательно, *KM* : *AC* = *BK* : *AB*, т.е. *KM* : 12 = 12 : 18, отсюда *KM* = 8 (м).

Ответ: 8 м.

Пример 2. Две стороны треугольника равны *a* и *b*, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна *c*.

1) Вычислить площадь треугольника.
2) Вычислить третью сторону треугольника.



Дано: треугольник *ABC*;
$AB = a$, $BC = b$; $AO = OC$, $BO = c$.

Вычислить: 1) $S_{\Delta ABC}$; 2) AC.

Решение.

1) Так как медиана *BO* делит сторону *AC* на две равные части, то, очевидно, при повороте треугольника *BOC* на 180° вокруг точки *O* получается треугольник *ABD*, равновеликий данному, так как при повороте треугольник *BOC* переходит в равный ему треугольник *DAO*, следовательно, $S_3 = S_1$.

В треугольнике *ABD* известны все три стороны:
$AB = a$, $AD = BC = b$, $BD = 2\,BO = 2c$ – поэтому его площадь можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BD)(p-AD)}\text{, где } p = \frac{a+b+2c}{2}.$$

Таким образом, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2c)} =$

$$= \sqrt{\frac{a+b+2c}{2}\cdot\frac{b+2c-a}{2}\cdot\frac{a+2c-b}{2}\cdot\frac{a+b-2c}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{((a+b)^2-4c^2)(4c^2-(a-b)^2)}}{4}.$$

Замечание. В подобных задачах вместо поворота производят равносильное преобразование: удлиняют вдвое медиану и получают точку *D*, затем треугольник *ABD*. Этим способом всегда можно решить задачу нахождения площади треугольника по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне. Способ работает также и в некоторых других задачах, связанных с медианой треугольника.

2) Вычислим теперь сторону *AC*, дважды применив теорему косинусов.

Из $\Delta\, ABD$:

$$a^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc\cos\angle D\text{, откуда } \cos\angle D = \frac{b^2+4c^2-a^2}{4bc}.$$

Из $\Delta\, AOD$:

$$AO^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle D = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\frac{b^2+4c^2-a^2}{4bc} = \frac{a^2+b^2-2c^2}{2}$$

Итак, $AC = 2AO = 2\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2}} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4c^2}$.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.1. В треугольнике две стороны равны 11 и 23 и медиана третьей стороны 10. Найти третью сторону.

10.1.2. В треугольнике одна из сторон равна 26 дм, а ее медиана равна 16 дм. Определить две другие стороны этого треугольника, если они относятся как 3:5.

10.1.3. Определить площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 см и 29 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 26.

10.1.4. Стороны треугольника равны 25 см, 24 см и 7 см. Найти радиус вписанного и описанного кругов.

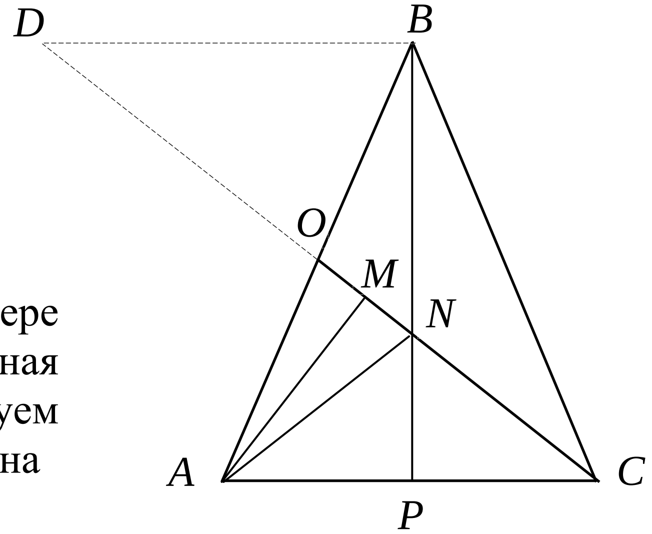
10.1.5.Стороны треугольника 20, 34 и 42 см. Найти площадь вписанного прямоугольника, если известно, что его периметр равен 45 см.

10.1.6. В окружность с центром в точке O вписан треугольник MPK, в котором $\angle M = 65°$, $\angle P = 70°$. Найти площадь треугольника POM, если сторона PM равна 22.

10.1.7. Окружность с центром O вписана в треугольник MPK со сторонами $PK = 7$, $MP = 8$, $MK = 13$. Найти градусную меру угла MOK.

Равнобедренный треугольник

Пример 3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна $4a$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $3a$ см. Найти основание треугольника.



Дано: ΔABC;
$AB = BC = 4a$;
CO – медиана; $CO = 3a$.

Вычислить: AC.

Решение. Так же, как и в примере 2 (см. раздел «Треугольник. Вписанная и описанная окружность»), попробуем продолжить медиану CO за точку O на ее длину. Получим треугольник *BCD*. Но в Δ *BCD* известны только две стороны: $BC = 4a$ и $DC = 6a$, поэтому решить этот треугольник невозможно (сравните с примером 2: в нем медиана была проведена к *неизвестной* стороне, а в данном случае – к известной $AB = 4a$).

Воспользуемся свойством медиан: в треугольнике все медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, начиная от вершины. Проведем еще одну медиану: *BP*. Пусть *N* – точка пересечения медиан, тогда $CN : NO = 2 : 1$, то есть $CN = 2a$, $NO = a$.

Так как *CO* – медиана, то $AO = 0{,}5\,AB = 2a$.

Треугольник *ABC* – равнобедренный, поэтому медиана *BP* лежит на срединном перпендикуляре к отрезку *AC*, а так как точка *N* принадлежит серединному перпендикуляру, то $AN = NC = 2a$. Таким образом, треугольник *AON* – тоже равнобедренный ($AO = AN$). Его высота *AM* является и медианой, значит, делит сторону *ON* пополам: $OM = MN = 0{,}5\,a$.

Из треугольника *AOM*, по теореме косинусов,
$\cos\angle AOM = \dfrac{0{,}5a}{2a} = 0{,}25$, а из треугольника *AOC*, по теореме косинусов,

$$AC = \sqrt{AO^2 + OC^2 - 2\cdot AO\cdot OC\cos\angle AOM} = \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 3a} = a\sqrt{10}\,.$$

Ответ: $AC = a\sqrt{10}$.

Замечание. Решение задачи оказалось возможным только потому, что получился равнобедренный треугольник *AON*. Легко видеть, что *не при любых* длинах отрезков *AB* и *OC* треугольник *AON* оказывается равнобедренным. Значит, примененный способ решения *нельзя* обобщить на все задачи, в которых известна боковая сторона равнобедренного треугольника и ее медиана.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.8. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, высота – 4 см. Найти радиус описанного круга**.**

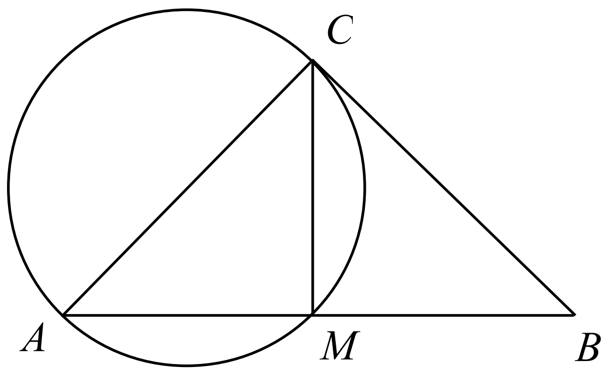
10.1.9. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а угол при основании равен 30°. Определить диаметр описанной окружности.

10.1.10. Найти основание равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2, а углы α при основании таковы, что $\mathrm{tg}\alpha = 4$.

10.1.11. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найти основание треугольника.
10.1.12. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота 20 см. Найти высоту, опущенную на боковую сторону.
10.1.13. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении 8:5, считая от вершины, лежащей против основания. Найти основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

Прямоугольный треугольник.

Пример. На катете *AC* прямоугольного треугольника *ABC* К как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу *AB* в точке *M*. Найти наибольшее возможное значение площади треугольника *ACM*, если $AC = 3$, $BC = 1$.



Дано: $\Delta\, ABC$ – прямоугольный;
A, C, M – точки окружности;
AC – диаметр окружности;
$AC = 3$, $BC = 1$.

Найти: $\min\,(S_{\Delta\, ABC})$.

Решение.

Рассмотрим треугольник *ACM*. Так как *AC* – диаметр окружности, проходящей через точку *M*, то $\angle\, AMC$ – прямой, следовательно, *CM* – высота. Тогда $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10}$, $CM = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Пусть $AM = x$, тогда $BM = AB - x = \sqrt{10} - x$.

Известно, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое отрезков гипотенузы, на которые делит гипотенузу основание высоты. Следовательно, $CM = \sqrt{AM \cdot BM}$.

Получаем следующее уравнение: $\sqrt{x(\sqrt{10} - x)} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Возведем обе части в квадрат и после преобразований получим равносильное квадратное уравнение: $10x^2 - 10\sqrt{10}x + 9 = 0$. Это **урав-**

нение имеет два различных действительных положительных корня: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_2 = \frac{9}{\sqrt{10}}$.

При $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ получаем $S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}15$.

При $x_2 = \frac{9}{\sqrt{10}}$ площадь этого же треугольника равна 1,35.

Так как 1,35 > 0,15, то это и есть наибольшее возможное значение площади.

Ответ: 1,35.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.14. В прямоугольный треугольник с углом 30° вписан квадрат так, что прямой угол у них общий и все вершины квадрата лежат на сторонах треугольника. Найти длину большего катета, если длина стороны квадрата 3,5($\sqrt{3}$-1).

10.1.15. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

10.1.16. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

10.1.17. В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 10 и 15, вписан квадрат, имеющий с ним один общий угол. Найти периметр квадрата.

10.1.18. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а проекция меньшего катета на гипотенузу 3,6. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

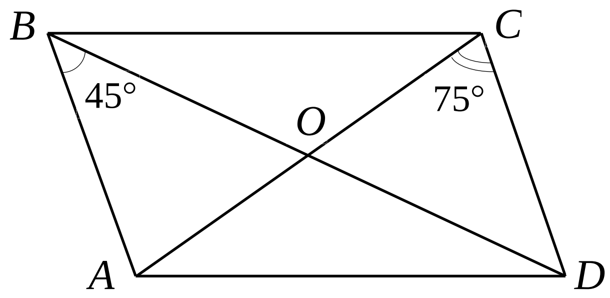
10.1.19. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 24 и 36 см. Найти катеты.

10.1.20. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см. Найти стороны треугольника.

10.1.21. Треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом C. Биссектриса BL и медиана CM пересекаются в точке K. Найти отношение $LK : BK$, если известно, что $MK : CK = 5:6$.

Параллелограмм. Ромб. Квадрат

Пример. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $3\sqrt{6}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AOD, если $\angle ABD = 45°$, а $\angle ACD = 75°$.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
A, B, D точки окружности O_1;
$R_1 = 3\sqrt{6}$; $\angle ABD = 45°$, $\angle ACD = 75°$;
A, O, D точки окружности O_2.

Найти R_2 **.**

Решение. $\angle BAC = \angle ACD = 75°$, тогда
$\angle AOD = \angle ABO + \angle BAO = 45° + 75° = 120°$.

Из $\Delta\ BAD$ по следствию из теоремы синусов имеем: $\dfrac{AD}{\sin\angle ABD} = 2R_1$,

откуда $AD = 2\cdot 3\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Из $\Delta\ AOD$ по следствию из теоремы синусов $\dfrac{AD}{\sin 120^\circ} = 2R_2$;

$\dfrac{6\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R_2$, поэтому $R_2 = 6$.

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.22. Найти площадь параллелограмма, у которого высоты равны 5 и 6 см, а угол между ними равен 30°.

10.1.23. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 120°. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O. Найти периметр треугольника ADE, если $AO = 7 - 4\sqrt{3}$.

10.1.24. Высота ромба 10 см, а величина тупого угла 150°. Найти площадь ромба.

10.1.25. Периметр ромба 200, а диагонали относятся как 3:4. Определить площадь ромба.

10.1.26. В ромб с острым углом 30° вписана окружность радиуса 4. Найти площадь ромба.

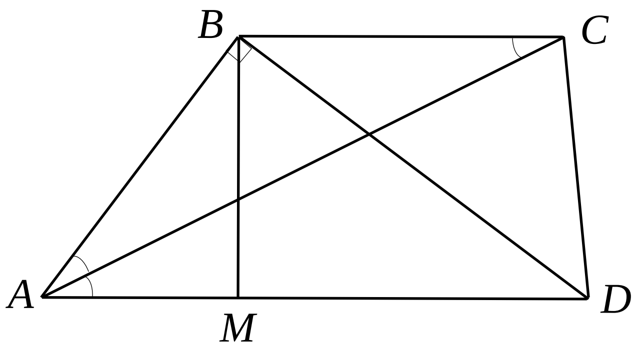
10.1.27. Найти диагонали ромба со стороной 5 см, если радиус вписанного в него круга равен 2,4 см.

10.1.28. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Определить стороны этого прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.

10.1.29. Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, составляющие с пересекаемыми сторонами квадрата угол в 60°. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата, если сторона квадрата равна 3.

Трапеция

Пример. В трапеции большее основание равно 25, одна из боковых сторон равна 15. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданной боковой стороной и нижним основанием пополам. Найти площадь трапеции.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
$AD = 25$; $AB = 15$;
$\angle ABD = 90°$; $\angle ABC = \angle CAD$;

Найти S_{ABCD}.

Решение.

$\angle BCA = \angle CAD$ как внутренние накрестлежащие углы при параллельных прямых BC и AD, следовательно, $\Delta\, ABC$ - равнобедренный: $BC = AB = 15$. $BM = AB \cdot \sin A = 15 \cdot \sin A$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BM = \frac{25+15}{2} \cdot 15 \sin A = 300 \cdot \sin A.$$

Из $\Delta\, ABD$: $\cos A = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos A} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 300 \cdot 0{,}8 = 240$.

Ответ: 240.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.30. Около окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найдите площадь трапеции.

10.1.31. Углы при основании трапеции равны 90° и 30°, одно основание в 2 раза больше другого и равно 24. Найти площадь трапеции

10.1.32. Около круга радиуса 2 см описана равнобочная трапеция с площадью 20 см^2. Найти стороны трапеции.

10.1.33. В равнобедренной трапеции длина средней линии 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

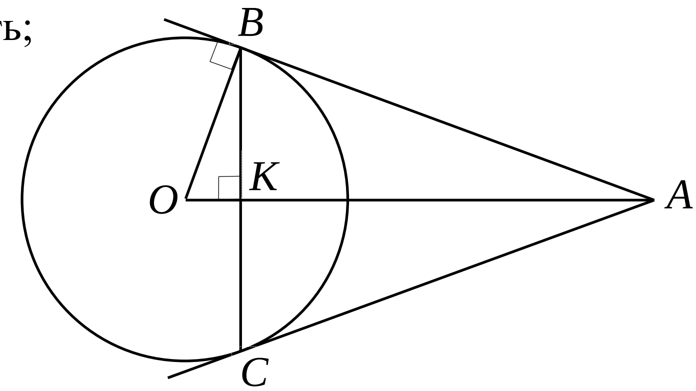
10.1.34. Основания равнобочной трапеции равны 13 и 17. Найти площадь трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

10.1.35. Основания трапеции 30 и 12 см, диагонали 20 и 34 см. Найти площадь трапеции.

10.1.36. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 см и 44 см, а непараллельные – 17см и 25 см.

Окружность, касательная, секущая

Пример. Из точки проведены к окружности две касательные. Расстояние от этой точки до каждой из точек касания равно 5. Найти радиус окружности, если расстояние между точками касания равно 6.



Дано: $\omega\ (O, OB)$ - окружность;
AB, AC – касательные;
B, C – точки касания;
$BC = 6$; $AB = AC = 5$.

Найти: OB.

Решение.

1) $OB \perp AB,\ BK = KC = 3$.

2) $\Delta AKB: AK^2 = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

3) $\Delta AOB: BK^2 = OK \cdot AK,\ OK = \dfrac{9}{4},\ AO = 4 + 2\dfrac{1}{4} = 6\dfrac{1}{4}$.

4) $OB = \sqrt{OK \cdot OA} = \sqrt{\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{25}{4}} = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$.

Ответ: 3,75.

Задачи для самостоятельного решения:

10.1.37. Из точки A к окружности проведены две касательные, образующие угол в 60° и касающиеся окружности в точках B и C. Третья касательная к данной окружности, параллельная BC, отсекает от треугольника ABC меньший треугольник. Найти периметр меньшего треугольника, если периметр треугольника ABC равен 10,5.

10.1.38. В окружности проведены хорда MN длины $11\sqrt{3}$ и диаметр MP. В точке N проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра MР за точку P в точке Q под углом 30°. Найти PQ.

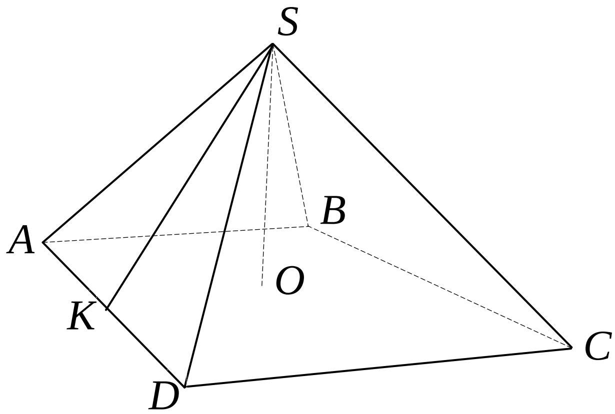
10.1.39. Из точки B к окружности проведены касательные BP и BQ (P и Q – точки касания). Найти длину хорды PQ, если длина отрезка BP равна 40, а расстояние от центра окружности до хорды PQ равно 18.

10.1.40. Найти радиус окружности, вписанный в сектор радиуса 6 и периметра 12 + 2π.

10.2. Стереометрия

Основные пространственные фигуры и соотношения

Пирамида



V – объем пирамиды;
S – площадь основания;
$SO = h$ – высота;
$V = \frac{1}{3} S \cdot h$.

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а высота проходит через его центр.

Р – периметр основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности;

$SK = l$ – апофема; $S_{\text{áîê}} = \frac{1}{2} P \cdot l$.

Если все боковые ребра пирамиды равны, то:

1) боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;

2) вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности.

Если все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то:

1) равны апофемы всех боковых граней;

2) вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

Если высота треугольной пирамиды проектируется в точку пересечения высот основания, то противоположные ребра пирамиды взаимно перпендикулярны.

Тетраэдр – это пирамида, все грани которой равносторонние треугольники.

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

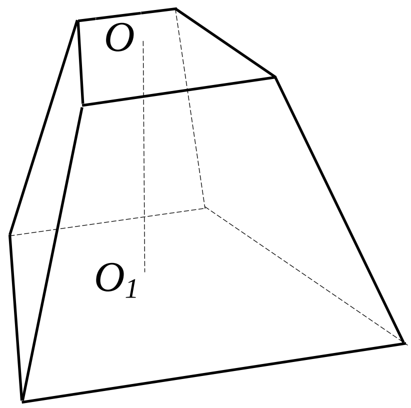
V – объем пирамиды;

S_1 и S_2 – площади оснований;

h – высота; $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$

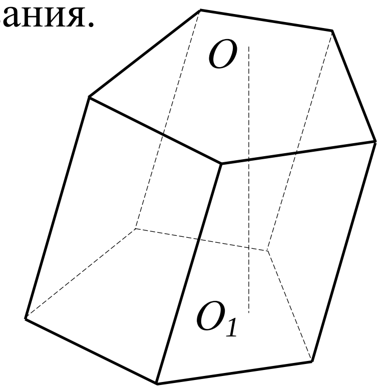
P_1 и P_2 – периметры оснований;

$$S_{áîê} = \frac{1}{2}l\left(Ð_1 + P_2\right),\ l \text{ – апофема.}$$



Призма

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях (оснований) и параллелограммов (боковых граней), число которых равно числу сторон основания.



V - объем призмы;

S - площадь основания;

h - высота; $V = S \cdot h$.

P - периметр основания;

$S_{бок} = P \cdot h$.

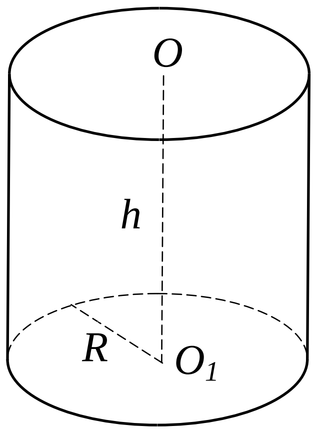
Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований.

Прямая призма называется *правильной*, если в ее основаниях лежат правильные многоугольники.

Если основания прямой призмы – прямоугольники, то она – прямоугольный параллелепипед.
a, b, c – длины ребер; d – диагональ;
$V = abc$; $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.

Цилиндр



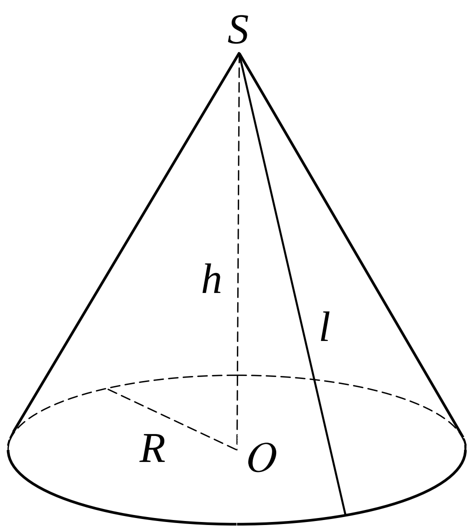
h – высота цилиндра;
R – радиус основания;
$V = \pi R^2 h$; $S = 2\pi Rh$

Конус

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$S_{бок} = \pi Rl$

$S_{пол} = \pi R(R + l)$



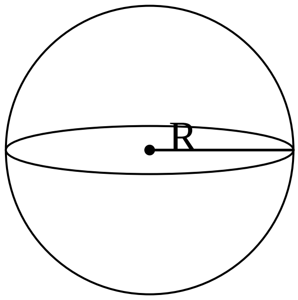
Сфера

Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от заданной, называется *сферой*.

Фигура, ограниченная сферой, называется *шаром*.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

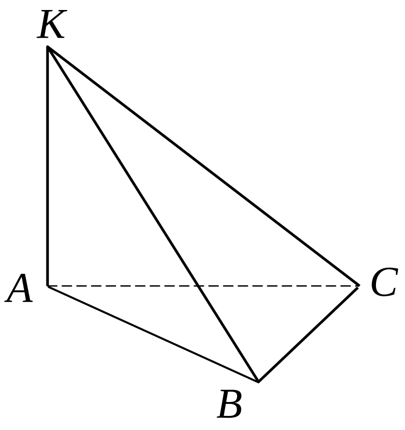
$S = 4\pi R^2$



Пример 1. В пирамиде КАВС ребро КВ перпендикулярно плоскости основания. Угол между плоскостями АСК и АВС равен 45°, $\angle$АСВ = 90°, АВ = 13, АС = 12. Найти высоту пирамиды.

Дано: пирамида KABC, $KB \perp ABC$, $\angle$ ACB = - 90°, AB = 13, AC =12; угол между плоскостями ABC и AKC равен 45°.

Найти: высоту пирамиды.



Решение. 1. $KB \perp ABC$, KC – наклонная, BC – проекция KC. Так как $BC \perp AC$, то $KC \perp AC$ (теорема о трех перпендикулярах).

2.$BC \perp AC$ и $KC \perp AC$, следовательно, $\angle BCK$ – линейный угол двугранного угла при ребре AC, поэтому $\angle BCK = 45°$.

В треугольнике ABC: $BC^2 = AB^2 - AC^2$, т. е. BC = 5.

$KB \perp ABC$, следовательно, KB – высота пирамиды и $KB \perp BC$. Так как $\angle BCK = 45°$, то KB = BC = 5.

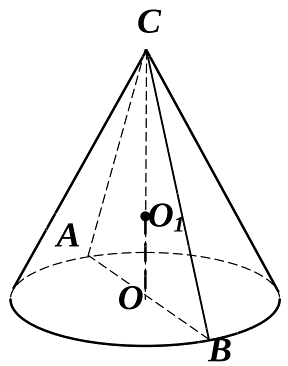
Ответ: 5.

Пример 2. Диаметр основания конуса равен 6 м, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь описанной около конуса сферы.

Дано: конус, угол наклона образующей BC к плоскости основания равен 60°. AB = 6 м.

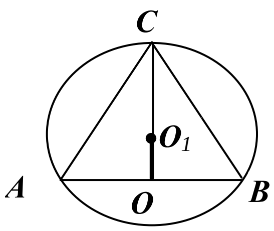
Найти: $S_{сф}$.

Решение. Центр описанной сферы лежит на оси конуса, т. е.



$O_1 \in OC$. CO перпендикулярна плоскости основания, следовательно, OB – проекция BC, а значит, $\angle OBC=60°$ (определение угла между прямой и плоскостью).

Рассмотрим осевое сечение конуса – треугольник ABC. Так как $O_1 \in OC$, то O_1C – радиус описанной сферы.



В треугольнике ABC: AC=BC (образующие конуса), следовательно, $\angle A=\angle B=60°$, тогда $\angle C=60°$ и AC=BC=AB=6 м.

В правильном треугольнике ABC:

$$R = O_1C = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \quad (м).$$

Найдем площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(2\sqrt{3})^2 = 48\pi \quad (м^2)$$

Ответ*:* 48π м^2.

Задачи для самостоятельного решения:

10.2.1. Радиус основания конуса равен 15 см, угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найти объем конуса.

10.2.2. Образующая конуса равна ℓ и наклонена к плоскости основания под углом α. Найти площадь полной поверхности конуса и площадь боковой поверхности его.

10.2.3. Образующая конуса ℓ составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объем конуса.

10.2.4. Радиус основания конуса равен r, угол между образующей и плоскостью основания конуса равен 30°. Найти объем конуса.

10.2.5. Площадь боковой поверхности конуса S. Образующая этого конуса равна ℓ. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

10.2.6. Осевым сечением конуса служит равнобедренный треугольник с площадью, равной 9. Найти объем конуса, если треугольник является прямоугольным.

10.2.7. Образующая конуса равна $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$. Найти площадь полной поверхности конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса прямой.

10.2.8. Разность между образующей конуса и радиусом его основания равна 1, а угол между ними 60°. Найти объем конуса.

10.2.9. Диагональ осевого сечения цилиндра равна m и составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

10.2.10. Найти диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра 120π ед^3, а боковая поверхность равна 60π ед^2.

10.2.11. Высота цилиндра равна длине окружности его основания. Найти объем цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна $\sqrt[3]{2304\pi^2}$.

10.2.12. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти диаметр основания, если объем цилиндра равен $432\pi^2$.

10.2.13. Цилиндр, высота которого равна 20 м, пересечен плоскостью, параллельной оси цилиндра и отстоящей на расстоянии 5 см от оси. Секущая плоскость отсекает от окружности сектор в 120°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

10.2.14. Цилиндр пересечен плоскостью, перпендикулярной к основанию и отсекающей на окружности дугу α. Диагональ сечения равна d и составляет с основанием угол β. Найти объем цилиндра.

10.2.15. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат, площадь которого равна 76π. Найти площадь основания цилиндра.

10.2.16. В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами a и b и острым углом α. Высота призмы равна большей диагонали параллелограмма. Найти объем призмы.

10.2.17. Диагональ правильной четырехугольной призмы 20 см и наклонена к боковой грани под углом 30°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

10.2.18. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30°, а сторона основания равна 5 см.

10.2.19. Найти объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину 8 см и составляет с боковым ребром призмы угол 30°.

10.2.20. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 6 и образуют угол 30°. Боковая поверхность равна 24. Найти объем параллелепипеда.

10.2.21. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α =30°, а с большей боковой гранью угол β = 45°. Найти объем параллелепипеда, если площадь его основания равна 32 см^2.

10.2.22. В прямом параллелепипеде основанием служит ромб, острый угол которого равен 2α, а меньшая диагональ «d». Высота параллелепипеда равна стороне ромба. Найти объем параллелепипеда.

10.2.23. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Найти объем параллелепипеда, если α=60°, большая диагональ ромба 8 см, а большая диагональ параллелепипеда 10 см.

10.2.24. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, а угол при нем равен 45°. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

10.2.25. Найти объем прямого параллелепипеда, зная, что высота его равна $\sqrt{3}$, диагонали его составляют с основанием углы 45° и 60° и основанием служит ромб.

10.2.26. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной 6, угол между плоскостями двух боковых граней 60°. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания 45°. Найти объем параллелепипеда.

10.2.27. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна $\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

10.2.28. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°.

10.2.29. Найти полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если плоский угол при вершине её равен 60°, а радиус круга, описанного около основания, R=$\sqrt{3}$.

10.2.30. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна ее боковому ребру. Найти объем пирамиды, если ее боковое ребро равно $\sqrt{3}$ см.

10.2.31. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол 60°.

10.2.32. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4 и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

10.2.33. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и образует с высотой пирамиды угол 30°. Найти объем пирамиды.

10.2.34. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды, равно 10 см, плоский угол при вершине 120°. Найти полную поверхность пирамиды.

10.2.35. Апофема боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 5, а угол между апофемой и плоскостью основания равен 30°. Найти объем пирамиды.

10.2.36. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение боковой поверхности этой пирамиды к площади ее основания.

10.2.37. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Вычислить поверхность образовавшейся пирамиды, если ребро куба равно a.

10.2.38. Найти объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а стороны оснований 14 см и 10 см.

10.2.39. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

10.2.40. Основание пирамиды – квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найти площадь боковой поверхности, если сторона основания 20 см, а высота 21 см.

10.2.41. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания 6, а двугранный угол при основании 45°.

10.2.42. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найти объем пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°.

10.2.43. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом α. Все ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

10.2.44. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 дм, а ее боковая поверхность составляет 3 дм^2. Найти объем пирамиды.

10.2.45. В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания равны b. Угол между равными сторонами основания α. Найти объем пирамиды.

10.2.46. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной $2\sqrt{3}$, а углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

10.2.47. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а ее боковая поверхность $0{,}5\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

10.2.48. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна 36.

10.2.49. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

10.2.50. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$ см^3.

10.2.51. В конус с образующей, равной $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ и наклоненной к плоскости основания под углом 60°, вписан шар. Найти объем шара.

10.2.52. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}}$, а угол между высотой и образующей равен 45°. Найти объем шара.

10.2.53. В шар вписан конус, высота и радиус основания которого соответственно равны 3 и $3\sqrt{3}$. Найти радиус шара.

10.2.54. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найти полную поверхность конуса.

10.2.55. Конус вписан в шар, радиус которого 17. Найти радиус основания конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 30°.

10.3. Задания для подготовки к ЕГЭ

Планиметрия

10.3.1. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 2π, тогда длина медианы, проведенной из вершины прямого угла, равна

1) 1; 2) 2π; 3) π; 4) 2; 5) другой ответ.

10.3.2. Диагонали четырехугольника равны 2 и 6. Периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника, равен … .

10.3.3. Площадь треугольника равна 6, радиус вписанной окружности удовлетворяет соотношению $r^2 - 21r + 20 = 0$, тогда полупериметр треугольника равен

1) 6; 2) 12; 3) 4; 4) 3; 5) другой ответ.

10.3.4. В прямоугольном треугольнике внешний угол при основании равен 120º, тогда отношение гипотенузы и катета, перпендикулярного основанию, равно

1) 0,5; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4) 2; 5) другой ответ.

10.3.5. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2 м и 5 м.

10.3.6. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно 4, тогда радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен

1) решить нельзя; 2) 2π; 3) 1; 4) 4; 5) 2.

10.3.7. В треугольнике ABC сторона AB = 2, $\angle A = 60^\circ \angle B = 80^\circ$. На стороне AC взята точка D, так что AD = 2, тогда $\angle$ ДBC (в градусах) равен … .

10.3.8. Боковые стороны трапеции ABCD AB = 7, CD = 11, а основания – BC = 5, AD = 15. Прямая BK||CD и отсекает от трапеции треугольник ABK, периметр которого равен … .

10.3.9. Периметр ромба равен 8, высота равна 1. Тогда тупой угол ромба (в градусах) равен … .

10.3.10. Около трапеции ABCD с основанием AD и BC описана окружность радиусом 5. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Если основание BC равно 6, тогда диагональ AC равна … .

10.3.11. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 7:13, тогда высота трапеции равна … .

10.3.12. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 5, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Периметр отсеченного треугольника равен … .

10.3.13. Диагональ BD четырехугольника ABCD является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Если BD = 2, AB = 1, $\angle ABD : \angle ABD = 4:3$, то диагональ AC (ответ округлить до ближайшего целого числа) равна … .

10.3.14. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 7, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Тогда периметр отсеченного треугольника равен … .

10.3.15. Окружность, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3, считая от вершины C. Тогда $\angle ABC$ (в градусах) равен … .

10.3.16. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, M и N. Если угол $\angle KMN = 50^\circ$, то угол ABC (в градусах) равен … .

10.3.17. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12, тогда средняя линия трапеции равна … .

10.3.18. Боковая сторона равнобедренного треугольника АБС равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найти площадь треугольника BOH.

10.3.19. В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок BC соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка BC.

10.3.20. В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найти периметр треугольника CDP, если DK = 18, PK = 24, AD = 15.

10.3.21. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, высоты BE и CH пересекаются в точке K, причем BH = 6, KH = 3. Найти площадь треугольника CBK.

Стереометрия

10.3.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Тогда площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершины C_1, B_1 и D_1 равна:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) другой ответ 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.3.23. Объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1, равен:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 5) другой ответ.

10.3.24. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 60, апофема равна 5, тогда объем пирамиды равен …

10.3.25. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°, тогда объем пирамиды равен … .

10.3.26. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3, апофема образует с плоскостью основания угол 60°, тогда площадь боковой поверхности пирамиды равна … .

10.3.27. Объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и углом боковой грани с плоскостью основания, равным α, равен:

1) $a^3 tg\frac{\alpha}{6}$; 2) $a^3 tg\frac{\alpha}{12}$; 3) $a^3 tg\frac{\alpha}{40}$; 4) $a^3 tg\frac{\alpha}{24}$; 5) другой ответ.

10.3.28. Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9,6. Из вершины прямого угла C восстановлен перпендикуляр CM к плоскости треугольника ABC, причем CM = 28, тогда расстояние от точки M до гипотенузы AB равно:

1) 29,6; 2) 29,2; 3) 29,1; 4) 29,7; 5) другой ответ.

10.3.29. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$ и образует с плоскостью основания угол 45°, тогда объем пирамиды равен … .

10.3.30. Объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α, равен:

1) $0{,}5a^3\sqrt{3}tg\alpha$; 2) $0{,}5a^3\sqrt{2}ctg\alpha$; 3) $2a^3\sqrt{3}ctg\alpha$; 4) $a^3\sqrt{3}tg0{,}5\alpha$;

5) другой ответ.

10.3.31. Высота конуса равна 6, а объем равен 144π, тогда площадь полной поверхности куба, вписанного в конус, равна … .

10.3.32. Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. тогда радиус основания конуса равен … .

10.3.33. В конус с радиусом основания 4 и высотой $4\sqrt{3}$ вписана треугольная призма, у которой все ребра равны, тогда объем призмы равен … .

10.3.34. В шар, объем которого равен $\frac{34\pi^3}{27}$, вписана правильная четырехугольная пирамида. Если боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{17}$, а высота больше радиуса шара, то объем пирамиды равен

10.3.35. Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Если образующая конуса равна 10, то радиус шара равен

10.3.36. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Если объем шара равен $\frac{32}{3}$, то объем конуса равен … .

10.3.37. В шар вписан цилиндр. Объем цилиндра равен 24, а площадь осевого сечения равна $8\sqrt{2}$. Найти площадь поверхности шара. (Число π считайте равным 3).

10.3.38. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен $\frac{3}{2}$, KM = 10, объем цилиндра равен 150л. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

10.3.39. Угол между образующими CA и CB конуса равен 60°, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найти градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

10.3.40. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, площадь которого равна 15, AB = 7. Боковое ребро призмы равно 18. Найти тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью $AB\,C_1$.

10.3.41. Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания цилиндра равен 30°, MK = 8, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40л. Найти периметр осевого сечения цилиндра.

Глава 10. Геометрия

10.1.1. 30.
10.1.2. 15 дм и 25 дм.
10.1.3. 270 см^2.
10.1.4. 12,5 и 3.
10.1.5. 120 см^2.
10.1.6. 121.
10.1.7. 120.
10.1.8. 4,5.
10.1.9. 10.
10.1.10. 5 см.
10.1.11. $\sqrt{10}$ см.
10.1.12. 24 см.
10.1.13. 7.
10.1.14. 7.
10.1.15. $\dfrac{4ab}{a+b}$.
10.1.16. 5.
10.1.17. 24.
10.1.18. 2.
10.1.19. 36 см и 48 см.
10.1.20. 15; 20 и 25 см.
10.1.21. 0, 375.
10.1.22. 120.
10.1.23. 1.
10.1.24. 200.
10.1.25. 2400.
10.1.26. 128.
10.1.27. 16 и 8.
10.1.28. 4 м и 8 м.
10.1.29. 6.
10.1.30. 20.
10.1.31. $72\sqrt{3}$.
10.1.32. 2; 8; 5; 5.
10.1.33. 25.
10.1.34. 225.
10.1.35. 6 см^2.
10.1.36. 450 см^2.

10.1.37. **7.**
10.1.38. **11.**
10.1.39. **48.**
10.1.40. **7.**

Ответы

		ГЛАВА 10.2.	10.2.1. $1125\sqrt{3}\pi$ см^3
10.2.2. $\pi l^2\cos\alpha$; $2\pi l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	10.2.3. $\frac{\pi l^3\sqrt{3}}{24}$	10.2.4. $\frac{\pi r^3\sqrt{3}}{9}$	10.2.5. $\arcsin\frac{S}{\pi l^2}$
10.2.6.9π	10.2.7. 0,5	10.2.8. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	10.2.9. $\frac{\pi m^3}{4}\cos^2\alpha\sin\alpha$
10.2.10. $\frac{\sqrt{481}}{2}$	10.2.11. 12	10.2.12. 13	10.2.13. 400π см^2
10.2.14. $\frac{\pi d^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	10.2.15. 19π	10.2.16. $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$	10.2.17. $400\sqrt{2}$ см^2
10.2.18. $125\sqrt{2}$ см^3	10.2.19. $24\sqrt{3}$ см^3	10.2.20. 12	10.2.21. $128\sqrt[4]{2}$ см^3
10.2.22. $\frac{d^3 tg\alpha}{8\cos^2\alpha}$	10.2.23. $64\sqrt{3}$	10.2.24. $\frac{1}{8}$	10.2.25. $\frac{3}{2}$
10.2.26. $108\sqrt{3}$	10.2.27. $\frac{3}{4}$	10.2.28. 1,5	10.2.29. $6(\sqrt{3}+1)$
10.2.30. $\frac{3}{4}$	10.2.31. $\frac{9\sqrt{3}}{16}b^2$	10.2.32. 6	10.2.33. $\frac{\sqrt{3}}{12}b^3$
10.2.34. $150\sqrt{3}$	10.2.35. 62,5	10.2.36. $\sqrt{3}$	10.2.37. $2a^2$
10.2.38. 872 см^3	10.2.39. $\frac{R^2\sqrt{6}}{4}$	10.2.40. 1000	10.2.41. 108
10.2.42. $\frac{5}{\sqrt{3}}$	10.2.43. $\frac{c^3}{24}\sin 2ctg\beta$	10.2.44. $\frac{\sqrt{47}}{24}$	10.2.45. $\frac{b^3}{2}tg\alpha\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{2}}$

10.2.46. 3	10.2.47. $\frac{\sqrt{3}}{24}$	10.2.48. $144\sqrt{2}$	10.2.49. $2\mathrm{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{12}$
10.2.50. 24π	10.2.51. 288	10.2.52. 4	10.2.53. 6
10.2.54. $4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha \cos\frac{1}{2}$	10.2.55. 8,5		
10.3. ЕГЭ	10.3.1. 3	10.3.2. 8	10.3.3. 1
10.3.4. 3	10.3.5. 24	10.3.6. 5	10.3.7. 200
10.3.8. 28	10.3.9. 1500	10.3.10. $4\sqrt{5}$	10.3.11. 8
10.3.12. 5	10.3.13. 2	10.3.14. 7	10.3.15. 30
10.3.16. 10	10.3.17. 3	10.3.18. 24	10.3.19. 18
10.3.20. 112	10.3.21. 15	10.3.22. 5	10.3.23. 5
10.3.24. 4	10.3.25. 6	10.3.26. 24	10.3.27. 4
10.3.28. 1	10.3.29. 72	10.3.30. 1	10.3.31. 96
10.3.32. 15	10.3.33. 18	10.3.34. 16	10.3.35. 3
10.3.36. 24	10.3.37. 216	10.3.38. 60	10.3.39. 45
10.3.40. 4,2	10.3.41. 28		